

Forschungsheft 356

Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens“
Ausgabe B Band 3 September/Okttober 1932

Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren

Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungs-
forschung, Göttingen

von

J. Nikuradse

aus Tiflis (Georgien)

Mit 39 Abbildungen und 9 Zahlentafeln

LIBRARY
THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS



VDI-VERLAG G · M · B · H / BERLIN NW 7 / 1932

Inhaltverzeichnis

	Seite		Seite
Einleitung	1	c) Bestimmung des Rohrdurchmessers	
1. Experimenteller Teil		d) Statische Druckmessungen	
1. Versuchseinrichtung	3	e) Geschwindigkeitsmessungen	
2. Meßeinrichtung	4	4. Durchführung der Versuche	11
a) Geschwindigkeitsmeßapparat mit Drosselung und schwenkbarem Auslauf		II. Auswertung der Versuche	
b) Meßbottich		1. Geschwindigkeitsverteilung	11
c) Mikromanometer		2. Potenzgesetz	14
d) Arca-Regler		3. Universale Geschwindigkeitsverteilung	15
e) Schnellschlußhahn		4. Mischungsweg und Austauschgröße	18
3. Versuche	7	5. Ähnlichkeitsbetrachtung	24
a) Mengenummessungen		6. Widerstandsgesetz	29
b) Temperaturmessungen		7. Beziehung zwischen der mittleren und der maximalen Geschwindigkeit	33
		Zusammenfassung	34

Einleitung

Die bisherigen experimentellen Kenntnisse über die turbulenten Strömungen, welche der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen sind, waren noch nicht ausreichend, um eine einwandfreie Grundlage für die Turbulenztheorie zu liefern. Die älteren Untersuchungen, die in erster Linie auf die Gesetze des Strömungswiderstandes in Rohren gerichtet waren, konnten weder den Theoretiker noch den Praktiker befriedigen. Die Ergebnisse dieser Versuche blieben so lange wenig übersichtlich, als man sie nicht auf den physikalisch richtigen Parameter, auf die Reynoldssche Zahl (Re) bezog. In vielen Fällen wurde nicht berücksichtigt, daß sich die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr nur nach einer langen Strecke, der „Anlaufstrecke“, ausbildete. H. Blasius¹⁾ ist es gelungen, aus Gesichtspunkten der Ähnlichkeit das Versuchsmaterial über die Strömung in glatten Rohren zu ordnen. Er erhielt eine empirische Formel, die in einem Bereiche

der Reynoldsschen Zahlen bis etwa $Re = \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} = 100 \cdot 10^3$ ($\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit, d = Rohrdurchmesser, ν = kinematische Zähigkeit) die Gesetzmäßigkeit des Strömungswiderstandes ziemlich genau wiedergibt. Für die Aufstellung seiner Widerstandsformel benutzte Blasius die Versuche von Saph und Schoder²⁾, welche mit Wasser gearbeitet und den Druckverlust in 15 gezogenen Messingrohren vom Durchmesser $d = 2,77$ mm bis 53,1 mm im Bereiche der Reynoldsschen Zahlen zwischen $Re = 1,4 \cdot 10^3$ und $104 \cdot 10^3$ gemessen haben. Blasius fand für die laminare Strömung die Formel $\lambda = 64/Re$ und für die turbulente Strömung $\lambda = 0,316/Re^{1/4}$ (λ = Widerstandszahl). Die Versuche von Saph und Schoder zeigen, daß der Übergang der laminaren in die turbulente Strömung etwa bei der Reynoldsschen Zahl (kritische Reynoldssche Zahl) $Re = 2000$ stattfindet. Der Übergangsbereich liegt zwischen den Reynoldsschen Zahlen $Re = 2000$ und 3000 . Neben den Versuchen mit Wasser von Saph und Schoder benutzte Blasius für die Aufstellung seines Ähnlichkeitsgesetzes die Versuche von Nußelt³⁾, der die Druckverluste für die Strömung von Druckluft in einem Rohr vom Durchmesser $d = 2,201$ cm untersucht hat. Wenn man aus die-

sen Versuchen die Widerstandszahl berechnet und in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl aufträgt, so erhält man dieselben Resultate, die aus den Versuchen von Saph und Schoder ermittelt wurden. Die Nußeltschen Werte, die im Bereiche der Reynoldsschen Zahlen $6 \cdot 10^3$ bis etwa $150 \cdot 10^3$ liegen, stehen mit der Widerstandsformel von Blasius in bester Übereinstimmung. Damit ist die Ähnlichkeit für verschiedene Flüssigkeiten, Wasser und Luft bestätigt. Ferner benutzt Blasius die Versuche von Lang, welche in einem Kupferrohr von $d = 6$ mm bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 326 \cdot 10^3$ gemacht sind. Die Versuche haben das Ziel verfolgt, einen Vergleich aufzustellen zwischen großen Geschwindigkeiten bei kleinem Rohrdurchmesser einerseits und kleinen Geschwindigkeiten bei großem Rohrdurchmesser andererseits. Dieser Vergleich hat zu einer sehr befriedigenden Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes geführt.

Nach der Aufstellung des Ähnlichkeitsgesetzes hat sich Ombeck⁴⁾ die Aufgabe gesetzt, die Abhängigkeit der Widerstandszahl von der Reynoldsschen Zahl aus den Versuchen mit Luft in einem großen Bereich Reynoldsscher Zahlen zu ermitteln und damit die Formel von Blasius nachzuprüfen. Die Versuche sind in kreisförmigen Rohren, die aus verschiedenem Material hergestellt waren und verschiedene Durchmesser hatten ($d = 2,004$ cm bis $d = 10$ cm), durchgeführt und reichten etwa bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 450 \cdot 10^3$. Aus diesen Versuchen erhielt Ombeck eine ähnliche Formel wie die von Blasius mit geringfügigen Abweichungen; diese liegen, wie Ombeck selbst erklärt, in der Unsicherheit der Bestimmung der kinematischen Zähigkeit. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes fand er bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 100 \cdot 10^3$ eine gute Übereinstimmung mit der Formel von Blasius.

Stanton und Pannell⁵⁾ haben für die Nachprüfung des Ähnlichkeitsgesetzes umfangreiche Versuche in kreisförmigen Rohren mit verschiedenen Durchmessern ($d = 0,361$ cm bis $d = 12,62$ cm) mit Wasser und Luft bei verschiedenen Temperaturen angestellt. Die Versuche lagen im Bereiche der Reynoldsschen Zahlen $2,2 \cdot 10^3$ bis $430 \cdot 10^3$. Die Ergebnisse dieser Versuche haben das Ähnlichkeits-

1) H. Blasius: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Nr. 131, Berlin 1913.

2) T. Saph and E. H. Schoder: An experimental study of the resistance to the flow of water in pipes. Trans. Amer. Soc. civ. Engr. Pap. 944, Bd. 51, 1903.

3) W. Nußelt: Wärmeübergang in Rohrleitungen, Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Nr. 89, Berlin 1910.

4) H. Ombeck: Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohrleitungen, Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Nr. 158/159, Berlin 1914.

5) T. E. Stanton and J. R. Pannell: Similarity of motion in relation to the surface friction of fluids, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), 74, 1914, 101-114.

gesetz in bester Weise bestätigt; bis zur Reynoldsschen Zahl $100 \cdot 10^3$ liegen die Versuchspunkte auf der Geraden nach *Blasius*. Darüber hinaus beobachtet man mit steigender Reynoldsscher Zahl eine zunehmende Abweichung von der Geraden nach oben. *Lees*⁶⁾ hat für die Aufstellung seiner empirischen Formel des Widerstandsgesetzes die *Stanton-Pannellschen* Ergebnisse zugrunde gelegt und

$$\text{fand } \lambda = 0,00714 + \frac{0,6104}{Re^{0,25}}.$$

*Jakob und Erk*⁷⁾ führten mit Wasser Versuche aus über den Druckabfall in Abhängigkeit von der Durchflußmenge in gezogenen Messingrohren vom Durchmesser $d = 7$ cm und 10 cm im Bereiche der Reynoldsschen Zahlen zwischen $86 \cdot 10^3$ und $462 \cdot 10^3$. Innerhalb der Streuung der Versuchspunkte um 1% bestätigten die Versuche die eben besprochenen Messungen von *Stanton* und *Pannell*. *Jakob und Erk* leiteten aus eigenen Versuchen eine Widerstandsformel ab, welche fast genau mit der von *Lees* übereinstimmt.

Von neueren Versuchen sollen die von *Hermann*⁸⁾ über das Widerstandsgesetz in noch größerem Bereiche der Reynoldsschen Zahlen erwähnt werden; *Hermann* hat die Versuche mit Wasser in einem Kupferrohr vom Durchmesser $d = 5$ cm und einem Messingrohr von $d = 6,8$ cm im Bereiche der Reynoldsschen Zahlen zwischen $20 \cdot 10^3$ und $1900 \cdot 10^3$ und Anlaufängen zwischen 88 und 600 Rohrhalmessern durchgeführt. Er untersuchte die Abhängigkeit der Widerstandszahl von der Reynoldsschen Zahl und fand für kurze Anlaufängen und kleinere Reynoldssche Zahlen eine gute Übereinstimmung mit dem Widerstandsgesetz, das früher *Stanton* und *Pannell*, *Jakob* und *Erk* und andere festgestellt hatten. Einen Anlaufeffekt (Abnahme der Widerstandszahl mit der Anlaufänge) hat *Hermann* bei einer Anlaufänge bis 600 Rohrhalmessern beobachtet; außerdem erhielt er mit steigender Reynoldsscher Zahl eine Zunahme der Anlaufänge. Die Versuchsergebnisse zeigen, daß angenähert als Anlaufstrecke eine Länge von $200 r$ zu betrachten ist. Aus diesen Versuchen leitet *Hermann* eine Formel für das Widerstandsgesetz ab, welche analog zu der von *Lees* ist. Am Schluß gibt er eine Tabelle an, die die Umrechnung der Widerstandszahl für beliebige Anlaufängen zwischen 88 und 600 Rohrhalmessern gestattet. *L. Schiller*⁹⁾, unter dessen Leitung *Hermann* gearbeitet hat, berichtete 1929 in Aachen auf dem Kongreß für Aerodynamik und verwandte Gebiete über die oben angeführten Ergebnisse, wobei sich herausstellte, daß die Widerstandszahlen oberhalb der von *Stanton* und *Pannell* und *Jakob* und *Erk* erreichten höchsten Reynoldsschen Zahlen wesentlich höher lagen als die in Göttingen gefundenen. Der höhere Widerstand zeigte offensichtlich, daß *Hermann* in seinem Versuchsrohr eine Drehung gehabt hatte, welche eine Widerstandserhöhung mit sich brachte. Diese Tatsache veranlaßte *L. Prandtl*¹⁰⁾ vorzuschlagen, vor den Rohreinlauf einen Gleichrichter zu bauen und die Messungen zu wiederholen. Die Nachmessungen ergaben, wie *L. Schiller* in einem Zusatz bei der Veröffentlichung seines Aachener Vortrages berichtet, daß ein Anlaufeffekt nach 250 Rohrhalmessern nicht mehr vorhanden war und daß bei scharfem Einlauf nach einer Anlaufänge von $100 r$ kein Anlaufeffekt mehr zu beob-

achten ist, was mit den Göttinger Feststellungen übereinstimmt. Hier soll noch erwähnt werden, daß die Göttinger noch nicht veröffentlichten umfangreichen Messungen über die Anlaufänge ergeben, daß der Anlaufeffekt von $100 r$ ab auch bei abgerundetem Einlauf nicht mehr vorhanden ist.

Zu den ersten guten Versuchen über die Geschwindigkeitsverteilung von turbulenten Strömungen in kreisförmigen Rohren gehören die von *Stanton*¹¹⁾. Die Messungen sind mit Luft in Rohren von 500 cm Länge und einem Durchmesser $d = 4,93$ cm und $d = 7,4$ cm gemacht und erstrecken sich über die Reynoldsschen Zahlen zwischen $14 \cdot 10^3$ und $60 \cdot 10^3$. Die Angaben des Druckgefälles, bei welchem die Geschwindigkeitsverteilungen aufgenommen sind, fehlen. Eine weitere derartige Messung mit Wasser ist vom Verfasser¹²⁾ in einem kreisförmigen Rohr von $2,8$ cm Durchmesser bei einer Reynoldsschen Zahl von etwa $180 \cdot 10^3$ durchgeführt. Ferner liegen auch Messungen der Geschwindigkeitsverteilungen in Kanälen und Rohren mit nicht kreisförmigem Querschnitt vor, die mit dieser Arbeit nicht in Verbindung stehen.

Aus den angeführten Arbeiten sieht man, daß der experimentelle Befund nicht ausreichend ist für die Klärung des Turbulenzproblems. Aus diesem Grunde hatten wir uns in Göttingen die Aufgabe gestellt, die bisherigen Untersuchungen in zwei Richtungen zu erweitern: Einerseits den Bereich der Versuche auf sehr große Reynoldssche Zahlen zu erstrecken und andererseits neben der Ermittlung des Widerstandsgesetzes auch die Geschwindigkeitsverteilungen, deren Kenntnis für die Erforschung der turbulenten Strömungen von großer Bedeutung ist, in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl zu klären. Wir haben eine große Versuchsreihe über die Geschwindigkeitsverteilungen und den Druckabfall in glatten Rohren bei höchst erreichbarer Meßgenauigkeit in einem möglichst großen Bereich von Reynoldsschen Zahlen durchgeführt. Durch zweckmäßige Auswertungen ist es gelungen, zu zeigen:

1. welche gesetzmäßigen Zusammenhänge zwischen dem Widerstand und der Geschwindigkeitsverteilung bestehen;
2. durch welche Formeln sich das Widerstandsgesetz und das Gesetz für die Geschwindigkeitsverteilung ausdrücken lassen;
3. welche Gesetzmäßigkeiten sich für die Austauschgröße und den Prandtlschen Mischungsweg ergeben.

Bei diesen Untersuchungen ist von den theoretischen Ergebnissen der *Kármánschen* Ähnlichkeitsbetrachtung¹³⁾ ausgiebig Gebrauch gemacht worden. Die Versuche haben diese Ergebnisse oberhalb der Grenze, bei welcher der Einfluß der Zähigkeit auf die turbulenten Vorgänge verschwindet, sehr gut bestätigt.

Die Versuche¹⁴⁾ sind im Jahre 1928/29 in dem von Prof. Dr. L. Prandtl geleiteten Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung durchgeführt worden. Die theoretische Verarbeitung der Versuchsergebnisse konnte erst im Sommer 1931 zum Abschluß gebracht werden. Die Versuchsanlage und die Versuchsapparate sind in den Werkstätten des Kaiser Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung gebaut.

Meinem hochverehrten Chef, Herrn Prof. Dr. L. Prandtl, der mich jederzeit mit seinen wertvollen Ratschlägen unterstützte, möchte ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen.

6) Ch. H. Lees: On the Flow of viscous Fluids through smooth circular Pipes. Proc. Roy. Soc., Lond. (A), Bd. 91 (1915) S. 46.

7) M. Jakob und S. Erk: Der Druckabfall in glatten Rohren und die Durchflußziffer von Normaldüsen, Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Nr. 267, Berlin 1924.

8) R. Hermann: Experimentelle Untersuchung zum Widerstandsgesetz des Kreisrohres bei hohen Reynoldsschen Zahlen und großen Anlaufängen. Diss. Leipzig und Akadem. Verlagsgesellschaft m. b. H. Leipzig 1930.

9) L. Schiller: Rohrwiderstand bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandte Gebiete. Aachen 1929, herausgegeben von A. Güllé, L. Hopf und Th. v. Kármán. Berlin 1930, Seite 69.

10) L. Prandtl: Diskussionsbemerkungen zum Vortrag von L. Schiller (s. Fußnote 9). Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik u. verwandte Gebiete. Aachen 1929, herausgegeben v. A. Güllé, L. Hopf u. Th. v. Kármán, Berlin 1930, Seite 72.

11) T. E. Stanton: The mechanical viscosity of fluids, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), Bd. 85 (1911) S. 366 bis 376.

12) J. Nikuradse: Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen, Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Nr. 281, Berlin 1926.

13) Th. v. Kármán: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 1930, S. 58.

14) Einen kurzen Bericht darüber hat Verf. in Aachen auf dem Kongreß der Aerodynamik und verwandte Gebiete erstattet. J. Nikuradse: Über turbulente Wasserströmungen in geraden Rohren bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandte Gebiete. Aachen 1929, herausgegeben von A. Güllé, L. Hopf und Th. v. Kármán, Berlin 1930, S. 68. In dem gleichen Band findet sich S. 69 ein Bericht von L. Schiller über gleichzeitig mit unseren Versuchen in Leipzig angestellte Versuche, auf die im folgenden mehrfach Bezug genommen werden wird.

sistellungen über-
werden, daß die
umfangreichen
daß der Anlauf-
ein Einlauf nicht

er die Geschwin-
mungen in kreis-
Stanton¹¹⁾. Die
n 500 cm Länge
d $d = 7,4$ cm ge-
oldsschen Zahlen
gaben des Druck-
keitsverteilungen
weitere derartige
2) in einem kreis-
ei einer Reynoldss-
ührt. Ferner lie-
itsverteilungen in
nigem Querschnitt
indung stehen.
man, daß der ex-
t für die Klärung
runde hatten wir
bisherigen Unter-
en: Einerseits den
ynoldsschen Zahlen
er Ermittlung des
ndigkeitsverteilung
g der turbulenten
in Abhängigkeit
Wir haben eine
igkeitsverteilungen
bei höchst erreich-
st großen Bereich
rt. Durch zweck-
zu zeigen:
inge zwischen dem
erteilung bestehen;
Widerstandsgesetz
eitsverteilung aus-

lie Austauschgröße
geben.

den theoretischen
eitsbetrachtung¹³⁾
Die Versuche haben
ei welcher der Ein-
ten Vorgänge ver-

28/29 in dem von
r Wilhelm-Institut
worden. Die theo-
echnisse konnte erst
acht werden. Die
arate sind in den
uts für Strömungs-

rof. Dr. L. Prandtl,
Ratschlägen unter-
e meinen herzlichsten

y of fluids, Proc. Roy.
6.
schwindigkeitsverteilung
Ing.-Wes. Nr. 261,

und Turbulenz, Nachr.
10, S. 58.
f. in Aachen auf dem
ehiete erstattet. J. Nr.
in geraden Rohren bei
aus dem Gebiete der
n 1929, herausgegeben
Berlin 1930, S. 63. In
dit von L. Schüller über
angestellte Versuche, auf
werden wird

1. Experimenteller Teil

1. Versuchseinrichtung

Zur Untersuchung der turbulenten Strömungsvorgänge in kreisförmigen Rohren wurden drei verschiedene Versuchsanlagen benutzt:

- Für kleine Reynoldssche Zahlen von etwa $3 \cdot 10^3$ bis $60 \cdot 10^3$ diente ein Kessel mit Überlauf, der von der Wasserleitung gespeist wurde;
- für größere Reynoldssche Zahlen bis etwa $1400 \cdot 10^3$ wurde das Wasser mittels einer Zentrifugalpumpe in Umlauf versetzt;
- zur Erreichung noch größerer Reynoldsscher Zahlen bis etwa $2500 \cdot 10^3$ wurde das im Wasserkessel aufgespeicherte Wasser mittels Druckluft ausgetrieben;
- bei den beiden letzten Einrichtungen wurde die Reynoldssche Zahl noch durch eine Temperaturerhöhung des Wassers gesteigert, wodurch sich beim 3. Falle der Höchstwert von $Re = 3300 \cdot 10^3$ erreichen ließ.

Zu a): Da eine vollkommen gleichbleibende Wassersäule bei geringer Durchflußmenge, wie dieses bei kleineren Reynoldsschen Zahlen erforderlich ist, mit einer Kreiselpumpe allein sehr schwer zu erzielen war, wurde folgende Anordnung getroffen. Durch die Zuleitung *zl* (Abb. 1) fließt das Wasser aus der Wasserleitung in den offenen Wasserkessel *wk*. Bei offenem Abflußhahn *ah* steigt das Wasser im Steigrohr *str* ebenso hoch wie im Wasserkessel *wk*. Da die Zuleitung eine etwas größere Wassermenge lieferte als durch das Versuchsrohr *vr* abfloß, wurde das überschüssige Wasser durch das Steigrohr *str* an den Fangtopf *ft* abgegeben, von wo es durch das Fallrohr *fr* abgeführt wurde, so daß eine gleichbleibende Wasserhöhe erreicht wurde. Um einen gleichmäßigen Wasserstrom im Versuchsrohr zu erreichen, wurde im zylindrischen Teil des Auslaufes des Wasserkessels *wk* ein Gleichrichter *gl* eingebaut. Dieser sollte die große Wirbelung, die, im Wasserkessel durch das einströmende Wasser verursacht, sich auch in das Versuchsrohr fortsetzt, beseitigen. Durch den konischen Teil des Auslaufes erhielt das Wasser eine Beschleunigung, die weiter beruhigend wirkte. Das Wasser wurde dann durch ein Rohr *zr* von 25 cm Dmr. und 250 cm Länge bis vor das Versuchsrohr gebracht. Es wurden Versuchsrohre nachstehender Größe benutzt (Zahlentafel 1).

Zahlentafel 1

Abmessungen der Versuchsrohre

$\bar{d}$ mm	l_e mm	l_I mm	l_{II} mm	l_a mm	x mm	$\frac{x}{\bar{d}}$	Bezeichnungen
10	550	500	500	450	2000	200	<i>vr</i> ₁
20	1330	500	500	170	2500	125	<i>vr</i> ₂
30	1960	500	500	40	3000	100	<i>vr</i> ₃
50	3300	1000	1000	70	6000	120	<i>vr</i> ₄
100	4000	1500	1000	550	7050	70,5	<i>vr</i> ₅

$\bar{d}$ = Innendurchmesser des Rohres; l_e = Einlaufänge;
 l_I = Meßstrecke I; l_{II} = Meßstrecke II; l_a = Auslaufänge;
 x = Gesamtlänge; $\frac{x}{\bar{d}}$ = relative Gesamtlänge.

Um einen gleichmäßigen Einlauf in das Versuchsrohr zu erhalten, ist bei allen Versuchen das Zuleitungsrohr *zr* zum Versuchsrohr hin konisch verjüngt bis zum Durchmesser des letzteren. In diesem Verjüngungsstück *al* (Abb. 4) befand sich bei den Versuchen mit Überlauf eine scharfkantige Einschnürung, die auch bei den kleinsten untersuchten Reynoldsschen Zahlen bis etwa $15 \cdot 10^3$ turbulente

Strömung gewährleisten sollte. Kurz vor der Verjüngung war an der höchsten Stelle des Zuleitungsrohres ein Entlüftungshahn *eh* angebracht. Das Versuchsrohr mit dem Geschwindigkeitsmeßapparat war auf zwei Wagen montiert, die ein bequemes Verschieben während des Umbaus gestatteten. Die Wagen liefen auf Schienen auf der Randmauer des Vorratskanals. In der Längsrichtung des Wagens lag eine optische Schiene, auf welcher die Reiter standen, die das Versuchsrohr trugen und ein Einstellen des Rohres in die waagerechte Richtung ermöglichten. Am Ende des Versuchsrohres befand sich ein Geschwindigkeitsmeßapparat, der weiter unten näher beschrieben ist. Darunter stand im Vorratskanal *vk* der Meßbottich *mb* (Abb. 4).

Zu b): Für die Versuche mit Kreislauf (Abb. 2) wurde das Wasser mit der Kreiselpumpe *kp*, die durch einen Antriebsmotor *am* (Leistung: 14 kW, Umdrehungszahl: veränderlich zwischen 1120 und 1900 U/min) angetrieben wurde, dem Vorratskanal *vk* entnommen und in den Wasserkessel *wk* gefördert. Aus diesem gelangte es durch das Versuchsrohr *vr* in den Vorratskanal *vk* zurück. Zur Grobregulierung dienten der Anlasser *an* des Antriebsmotors und der Schieber *sb*, der zwischen der Kreiselpumpe *kp* und dem Wasserkessel *wk* eingeschaltet war. Die Feinregulierung erfolgte durch ein Drosselventil *dv* am Geschwindigkeitsmeßapparat (Abb. 5). Die Kreiselpumpe war imstande, auf dem Wasserspiegel im Wasserkessel *wk* einen Druck bis zu 2 at zu halten. Der Druck wurde so erzeugt, daß das Wasser die in dem Kessel über dem Wasser befindliche Luft zusammenpreßte. Im allgemeinen wurde eine Wassersäule von 500 cm gehalten (Maße des Kessels *wk*: Höhe 6500 mm; Dmr. 1500 mm). Die eben beschriebene Versuchseinrichtung gestattete, Wasserströmungen bis zu etwa $Re = 1000 \cdot 10^3$ bei gewöhnlicher Temperatur zu erzeugen. Die Versuchsstrecke war im übrigen genau so wie bei der zuerst geschilderten Einrichtung.

Zu c): Die Druckluftanlage bestand aus einem Kompressor, der in dem Druckluftkessel *dk* (Abb. 1) einen Überdruck von etwa 10 at zu erzeugen imstande war. Der Druckluftkessel war durch einen Area-Regler *a* mit dem Wasserkessel *wk* verbunden; der Regler, der weiter unten näher beschrieben wird, sorgte für die Unveränderlichkeit des Druckes beim Austritt des Wassers aus dem Wasserkessel. Da die Ausströmzeit beschränkt war (kürzeste Zeitdauer etwa 45 s), sorgte der Schnellschlußhahn *sh*, der zwischen dem Wasserkessel und dem Versuchsrohr lag, für das schnelle Öffnen und Schließen der Versuchsleitung. Gesteuert wurde der Schnellschlußhahn mittels Druckluft. Für das Öffnen bzw. Schließen wurde etwa 0,1 s benötigt. Um zu vermeiden, daß durch das Schließen des Schnellschlußhahnes im Wasserrohr ein Unterdruck auftrat, sorgte das Schnüffelventil *sv*, das an der höchsten Stelle des Zuleitungsrohres *zr* zwischen Schnellschlußhahn und Versuchsrohr lag, für den Ausgleich mit der äußeren Luft. Da bei diesen Versuchen im freien Strahl gemessen wurde, war der Geschwindigkeitsmeßapparat *gm* offen und daran ein rechteckiges Steigrohr *sr* angebracht. Der freie Strahl wurde von dem Strahlvernichter *st*, der auf einem dritten Wagen gelagert war, aufgefangen und durch Umlenkung und den Beruhigungstopf *br* in den Vorratskanal zurückgeführt. Das Zuleitungsrohr *zr* hatte bei diesen Versuchen aus Platzmangel nur eine Länge von 1500 mm.

Zu d): Um noch größere Reynoldssche Zahlen zu erzeugen, wurde die kinematische Zähigkeit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ des Wassers durch eine Erhöhung der Temperatur herab-

gesetzt. Das gleiche Verfahren wurde auch zum Teil bei den Messungen mit Kreislauf angewandt, da die Durchführung der Versuche mittels dieser Anlage bei weitem weniger Zeit und Mühe erforderte als mit der letzten Versuchseinrichtung. Das Wasser wurde in einem Kessel mit Dampf erwärmt. Der Kessel lieferte etwa 1,1 l/s Wasser bei 40°C. Durch Verminderung der Mengelieferung konnte man die Wassertemperatur bis zu etwa 95°C steigern, was wegen der Abkühlung in der Versuchseinrichtung einer Temperatur von etwa 40°C im Versuchsrohr entsprach. Der Kessel befand sich an der Wand des Wasserlaboratoriums und mündete durch einen Schlauch *zf* in den Vorratskanal *vk*. Die Reynoldsschen Zahlen betrugen infolge der Temperaturerhöhung des Wassers bei der zweiten Anlage bis zu $Re = 1400 \cdot 10^3$, bei der dritten Anlage bis zu $Re = 3240 \cdot 10^3$. Die Gesamtansicht der Anlage für c) und d) ist aus Abb. 3 ersichtlich.

2. Meßeinrichtung

a) Geschwindigkeitsmeßapparat mit Drosselung und schwenkbarem Auslauf

Der Geschwindigkeitsmeßapparat (Abb. 4) besteht aus dem Gehäuse *m*, dem Deckel *d*, den Spindeln *sp* und *su*, dem Schlitten *schl* und dem beweglichen Pitotrohr *pt*. Das Gehäuse hat an beiden Seiten Fenster *f* für Beobachtungszwecke. In der Mitte befindet sich eine Wand *w*, die das Rückströmen von Flüssigkeit in den Meßraum verhindern soll. Der Deckel *d* ist fest mit dem Gehäuse verschraubt, so daß ein leichtes Abdichten möglich ist. Für die Entlüftung ist auf dem Deckel ein Hahn *e* angebracht.

Für die Bewegungen des Pitotrohres sind die Spindeln *sp* und *su* vorgesehen, die gleichzeitig den Schlitten *schl* tragen. Die Spindel *sp* hat ein Gewinde von 1 mm Steigung und schiebt den Schlitten in waagerechter Richtung; sie wird von außen gedreht und ist mit einer Stopfbüchse abgedichtet. Die Umdrehungen der Spindel *sp* werden auf ein Zählwerk *zw*₁ übertragen; dieses ist so angeordnet, daß die Rolle der letzten Zahlenstelle (Einerstelle) fest mit der Zählerachse verbunden ist, so daß der Zähler bei einer Umdrehung anstatt um eine Zahl zehn Zahlen weiterriekt und somit die zweite Stelle der Zahlen die Einerstelle ist. Man kann hierdurch bequem 0,1 mm Verschiebung ablesen. Mit der Vor- und Rückbewegung des Schlittens wird gleichzeitig das Pitotrohr in der gleichen Richtung bewegt.

Die senkrechten Bewegungen des Pitotrohrhalters *ph* erfolgen durch die Spindel *su*, welche kein Gewinde, sondern eine Nute hat. Durch die Umdrehungen der Spindel werden die Schraubenräder gedreht. Das Schraubenrad *z* hat ein Innengewinde mit 1 mm Steigung und schraubt den Pitotrohrhalter *ph* auf und ab, der gegen Drehen durch die Führungsflanken *fl* gesichert ist. Das Zählen geschieht durch den Zähler *zw*₂ in gleicher Weise wie bei der Spindel *sp*.

Der zu messende Gesamtdruck wird durch den Pitotrohrhalter *ph*, an dem Pitotrohre *pt* verschiedener Durchmesser parallel zur Strömungsrichtung angebracht werden können, und den Schlauch *s* nach außen geführt. Da die Geschwindigkeitsverteilung 0,1 bis 0,2 mm hinter dem Austrittsende des Versuchsrohres aufgenommen wird, muß in dieser Querschnittsebene auch der statische Druck gemessen werden; deshalb war in dem Flansch des Versuchsrohres eine Anbohrung *schl* von etwa 0,8 mm Dmr. angebracht. Diese Anbohrung lag etwa 2 mm vom Strahlrand entfernt. Der hier herrschende Druck war gleich dem Druck an dem Strahlrand.

Um die verschiedenen Durchflußmengen fein regulieren zu können, ist an dem Geschwindigkeitsmeßapparat ein Drosselventil *dv* (Abb. 4) angebracht. Durch die Schraub-

spindel *svsp* (Abb. 5) mit Meßskala *msk* läßt sich die Stellung des Drosselkegels *dk* einstellen.

Der schwenkbare Auslauf *sch* dient dazu, die Flüssigkeit zur Mengennmessung schnell in einen Meßbottich zu leiten und wieder wegzuleiten. Eine Kugellagerung *kl* ermöglichte sehr rasche Schwenkung.

Der Geschwindigkeitsmeßapparat, die Drossel-einrichtung und der schwenkbare Auslauf sind zusammenmontiert und liegen auf einem Wagen *wg* (Abb. 4), der ebenfalls auf den erwähnten Schienen in der Längsrichtung des Vorratskanals beweglich ist.

b) Meßbottich

Für die Mengennmessungen diente ein zylindrischer Meßbottich *mb* (Abb. 5) mit einem Fassungsvermögen von etwa 700 l bei 1000 mm Dmr. und 900 mm Höhe; er konnte unter den schwenkbaren Auslauf *sch* gefahren werden. Im Boden des Meßbottichs war ein Ablauf mit Hahn *ab* angebracht. Vor dem Hahn war ein mit Millimeterteilung versehenes Wasserstandsglas *ws* zur Ablesung der Wasserhöhe in Bottich angeordnet. Der Meßbottich stand auf vier Schraubfüßen *sf*, um ihn waagerecht einstellen zu können. Auf dem Wasser im Meßbottich schwamm ein durchlöcher-tes rundes Holzbrett, das die Schwingungen der Wasser-oberfläche dämpfte, wodurch die Ableszeit verkürzt wurde. Für die Messung kleinerer Mengen wurde ein ähnlicher Meßbottich von 178 mm Dmr. und 700 mm Höhe benutzt. Zur genaueren Ermittlung des Meßbottichdurch-messers wurde die Steighöhe des Wasserstandes in Ab-hängigkeit von der vorher durch Wägung bestimmte Wassermenge (etwa 10 kg) festgestellt.

c) Mikromanometer

Für die auftretenden kleinen Druckdifferenzen war die Ablesgenauigkeit der normalen Wassermanometer nicht mehr ausreichend. Es mußte eine Einrichtung geschaffen werden, deren Ablesgenauigkeit unseren Forderungen entsprach, die aber auch gleichzeitig bei größeren Drücken verwendbar war. Diese Aufgabe wurde für die Messung der Drucke von 0,02 bis etwa 500 mm W.-S. wie folgt gelöst. An ein waagerechtes Glasrohr mit drei Hähnen *h*₁, *h*₂, *h*₃ (Abb. 6) sind zwei Glasrohre zwischen je zwei Hähnen eingeschmolzen. Zwischen die beiden freien oberen Schenkel dieser Rohre wurde ein T-Stück mit 120° Scheitelwinkel so eingeschmolzen, daß ein Schenkel senkrecht nach oben stand. Dieses Ende des T-Stückes war mit einem Hahn *h*₅ verschließbar. Der Hahn *h*₄ in einem anderen Schenkel des T-Stückes gestattete die Unterbrechung der Verbindung zwischen den beiden Glasrohren. Die freien Enden *a*₁ und *a*₂ der Glasrohre waren durch Quetschhähne verschließbar. Wenn man diese Einrichtung als Wassermanometer benutzen will, schließt man die beiden Druckleitungen *l*₁ und *l*₂ an und öffnet die Hähne *h*₁, *h*₂ und *h*₄. Die Quecksilberfüllung schließt man die Druckleitungen bei *a*₁ und *a*₂ an und öffnet *h*₃. Zur Kontrolle des Nullpunktes während des Betriebes öffnet man *h*₃ bei dem Wassermanometer und *h*₄ bei dem Quecksilbermanometer. Der Ablesbereich hat eine Länge von etwa 500 mm. Die Steigerung der Meßgenauigkeit wurde durch Ablesmikroskope *mi* erreicht. Auf einer massiven Grundplatte *z* ist ein Vierkant-Präzisionsrohr fest aufmontiert, auf welchem die beiden Schlitten *sl* verschiebbar angeordnet sind. Jeder Schlitten trägt ein Ablesmikroskop *mi* mit Fadenkreuz. Die Verschiebung erfolgt durch Ritzel und Zahnstange. Der ein- und ausrückbare Schneckenantrieb *sa* (Abb. 7) ermöglicht eine genaue Feineinstellung. Der untere Schlitten trägt den Maßstab mit Millimeterteilung, der obere den Nonius *n* mit Fünftelteilung. Vor dem Nonius ist eine schwenkbare Lupe *lu* angebracht. Die Beleuchtung erfolgt durch

läßt sich die Stel-

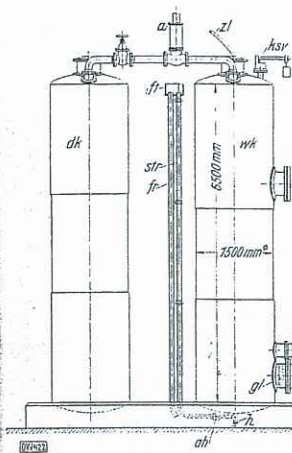
zu, die Flüssigkeit
Bottich zu leiten
gerung *kl* ermög-

ie Drossleinrich-
zusammenmontiert
4), der ebenfalls
srichtung des Vor-

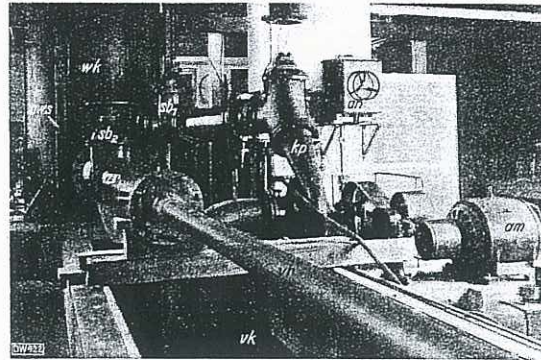
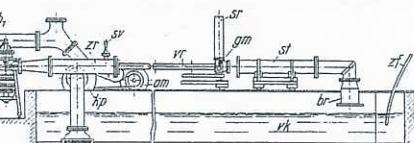
zylindrischer Meß-
vermögen von etwa
e; er konnte unter
werden. Im Boden
in *ab* angebracht.
teilung versehenes
r Wasserhöhe im
stand auf vier
stellen zu können.
m ein durchlöcher-
ungen der Wasser-
blesezeit verkürzt
fengen wurde ein
und 700 mm Höhe
Meßbottichdurch-
serstandes in Ab-
ägung bestimmten

ifferenzen war die
rmanometer nicht
ichtung geschaffen
Forderungen ent-
größeren Drucken
für die Messungen
V.-S. wie folgt ge-
t drei Hälften *h*₁,
zwischen je zwei
iden freien oberen
k mit 120° Sehen-
Schenkel senkrecht
kes war mit einem
dem anderen Schen-
schung der Verbin-
Die freien Enden *a*₃
elhähne verschließ-
assermanometer be-
Druckleitungen bei
1, *h*₂ und *h*₄. Bei
eckleitungen bei *a*₃
e des Nullpunktes
bei dem Wasser-
ermanometer. Der
500 mm. Die Stei-
arch Ablesemikro-
Grundplatte aus
r fest aufmontiert,
verschiebbar an
n Ablesemikrosk
ng erfolgt durch
und ausrückbare
t eine genaue Fein-
t den Maßstab *m*
onius *n* mit Fünf-
eine schwenkbare
erfolgt durch die

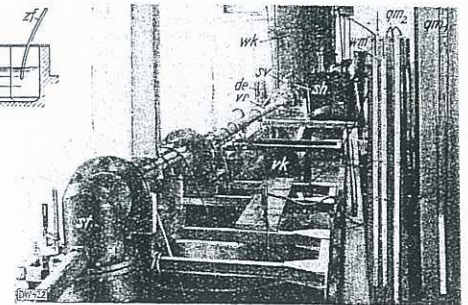
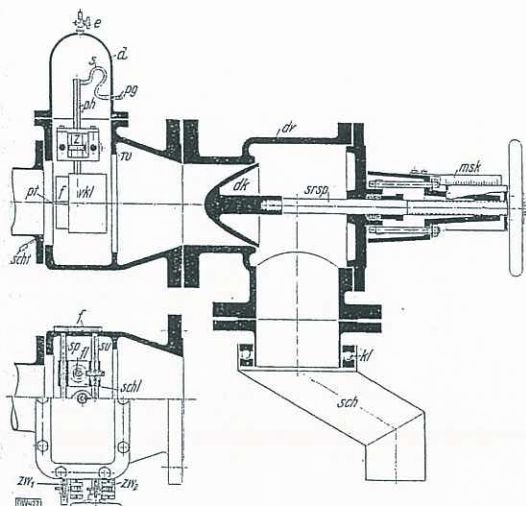
Abb. 1. Versuchsanlage



zl Zuleitung
wk Wasserkessel
dk Druckluftkessel
sb₁ Schieber zwischen *wk* und *kp*
sb₂ Schieber zwischen *wk* und *zr*
sh Schnellschlußhahn
st Steigrohr
fr Fallrohr
ft Fangtopf
ah Abflußhahn
gl Gleichrichter
zr Zuleitungsrohr
kso Sicherheitsventil für Wasserkessel

Abb. 2
Ansicht der Versuchsanlage
mit Kreislauf des Wassers

br Beruhigungstopf
so Schnüffelventil
dr Versuchsrohr
gm Geschwindigkeitsmeßapparat
sr Steigrohr
st Strahlvernichter
u Arca-Regler
kp Kreiselpumpe
am Antriebsmotor
vk Vorratskanal
an Anlasser des Elektromotors
zf Zuleitungsschlauch
af Abfluß
qms Quecksilberwasserstandsmesser

de Druckeinstellung qm₁, qm₂ Quecksilbermanometer
rm WassermanometerAbb. 4. Der große Geschwindigkeitsmeßapparat
mit Drosselung und schwenkbarem Auslauf

m Gehäuse
d Deckel
sp. su Spindel
schl Schlitten
pi Pitotrohr
ph Pitotrohrhalter
f Fenster
pg Leitungsansatz für Gesamtdruck
z Schraubenrad
fl Führungsflanken
s Schlauch
srsp Schraubenspindel
dk Drosselkegel
msk Meßskala
kl Kugellager
dv Drosselventil
w Wand
e Entlüftungshahn
nkl Verkleidung des Pitotrohrhalters
sch Schwenkbarer Auslauf
zw₁, zw₂ Zähler
schl Schlauchhülle

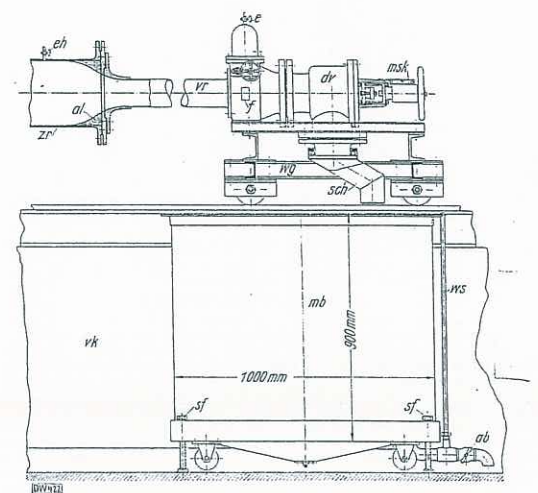


Abb. 5. Ein Teil der Versuchsanlage

zr Zuleitungsrohr
eh Entlüftungshahn
al Verjüngungsstück
dr Versuchsrohr
e Entlüftungshahn des Geschwindigkeitsmeßapparates
f Fenster des Geschwindigkeitsmeßapparates
dk Vorratskanal
dv Drosselventil
msk Meßskala des Drosselventils
sch Schwenkbarer Auslauf
rg Wagen
mb Meßbottich
ws Wasserstandsglas
ah Abflußhahn
sf Schraubfüße

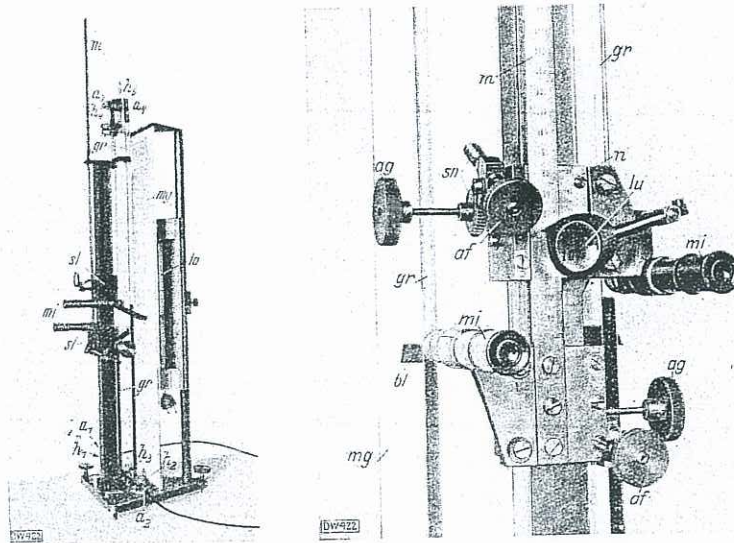


Abb. 6 und 7
Ansicht und Nahaufnahme
Mikromanometers

- h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 Hähne
- u_1, u_2, u_3, u_4 Druckleitungsanschlüsse
- mi Ablesemikroskop
- bl Blende
- gr Glasröhre
- mg Milchglasscheibe
- lu Soffittenlampe
- sl Schlitten
- m Maßstab
- sn Schneckenantrieb
- n Nonius
- ag Antriebsrädchen für Grobeinstellung
- af Antriebsrädchen für Feineinstellung

Soffittenlampe lu (Abb. 6), die hinter einer Milchglasscheibe mg verschiebbar angebracht ist. Durch verstellbare Blenden bl (Abb. 7) wird die zu betrachtende Zone des Meniskus verdunkelt, so daß sich derselbe schwarz von dem erleuchteten Milchglas abhebt. Durch Stellschrauben und Libelle (Abb. 6) läßt sich das Manometer genau senkrecht stellen.

d) Arca-Regler

Der Arca-Regler (Abb. 8), ein Geschenk der Firma Arca-Regler A.-G., Berlin W 9, hält den gewünschten Druck im Wasserkessel konstant. Die Wirkungsweise ist folgende: Bei wl ist die Wasserleitung angeschlossen. Ein Abzweig h_1 führt über eine Drossel dr , die die Durchflußmenge regelt. Das Wasser wirkt auf den Kolben ko und fließt durch die Leitung l_2 bis zum Tellerventil tr , welches sich bei hohem Druck im Wasserkessel schließt und bei niedrigen Drucken wieder öffnet. Die Spannfeder sf gestattet die Einstellung eines bestimmten Druckes vor Beginn der Versuche. Der Membranbalg mb überträgt den Druck mittels des Hebels h auf das Tellerventil tr . Läßt der Druck im Wasserkessel nach, so öffnet sich also das Tellerventil tr . Dadurch wird der Abfluß l_2 freigegeben; das Wasser der Wasserleitung wird jetzt nicht mehr gestaut, der Kolben ko wird mittels der Kolbenfeder kf nach oben gedrückt und mit ihm der Steuerkolben sk . Dieser gibt nun den Wasserweg unter dem Hubkolben hk frei. Der Wasserdruck hebt nun den Hubkolben und dadurch hebt sich das Regulierventil rv , womit die Verbindung zwischen Druckluftkessel dk und Wasserkessel wk hergestellt ist. Ist im Wasserkessel wk der eingestellte Druck wieder erreicht, so wirkt dieser durch die Druckleitung dl auf den Membranbalg, und das Tellerventil tr schließt sich. Dadurch wird der Druck auf den Kolben ko erhöht und drückt diesen nach unten. Dann ist der Wasserzufluß wl unter dem Hubkolben hk wieder versperrt und der Abfluß wk freigegeben. Die Hubfeder hf drückt das Regulierventil rv wieder zu. Dadurch, daß der Membranbalg mb nicht an den Luftraum im Kessel, sondern unten an den Wasserraum angeschlossen ist, wird während des Ausströmens der Wasserdruck an der Ausflußstelle unabhängig von der darüberstehenden Wassersäulenhöhe konstant gehalten.

e) Schnellschlußbahn¹⁵⁾

Der Schnellschlußbahn (Abb. 9) wird mit Druckluft rd. 3 at betrieben und kann in einer Zeit von etwa 0,1–0,2 Sek. geöffnet oder geschlossen werden. Der Vorgang beim Öffnen und Schließen des Schnellschlußbahnes folgender:

Durch Drehen des Steuerrades sr wird zuerst ein Nocken ein kleiner Hahn ha geöffnet, der Druckluft durch die Leitung l unter den Hubkolben hk führt. Der Hubkolben hk wird angehoben und mit ihm der Konus k bis zu dem Schlag sch , welcher einstellbar ist. Nun sind die Flächen des Konus k frei, und dieser wird durch den I-Kolben irk gedreht. Die Druckluft tritt in den Steuerkolben sk durch die Zuführung le und füllt die Kammer (siehe Schnitt A—A). Wird das Steuerrad sr und falls der Steuerkolben sk elektrisch oder durch E-Feld betriebsgedreht, so öffnen sich die Schlitze bei c und Druckluft strömt durch die Schlitze c in die Kammer und drückt den Drehkolben drk herum und somit auch Konus k des Hahnes. Die in den Kammern ko befindliche Luft entweicht über die Schlitze d ins Freie. Ist Konus k und der Drehkolben drk um 90° gedreht, schließt sich der kleine Hahn ha und läßt gleichzeitig Luft unter dem Hubkolben hk ab. Dieser samt dem I-Kolben irk wird dann durch eine einstellbare Feder f wieder hergedrückt. Das Schließen vollzieht sich beim Rückdrehen des Steuerrades sr durch dieselben Schaltstellungen in umgekehrter Reihenfolge.

Damit der Konus k nicht ins Pendeln gerät, ist eine Dämpfung vorgesehen (Schnitt B—B). Der Dämpfungskolben dmk ist fest mit dem Drehkolben drk verbunden. Die Kammern kd sind mit Öl gefüllt und die Zuführung mit der Rohrleitung r und den Schiebern sch verbunden. Beim Drehen des Dämpfungskolbens wird das Öl durch die Rohrleitung auf dessen Rückseite gedrückt und durch die Schieber sch mehr oder weniger gedrosselt. Dem Augenblick, wo der Dämpfungskolben dmk die Führungsböhrungen e abschließt, ist das Öl bis auf die dichtesten Stellen vollständig abgeschlossen. Durch die Dämpfung wird ein hartes Anschlagen verhindert.

¹⁵⁾ Der Schnellschlußbahn von 150 mm Durchmesser, der allgemein für die Versuche mit Überschallgeschwindigkeit verwendet wird, ist von Prof. J. Böckert konstruiert.

ahme des

ingsanschlüsse

r Grobein-

r Feinein-

ackluft von
etwa 0,1 bis
er Vorgang
3halmes ist

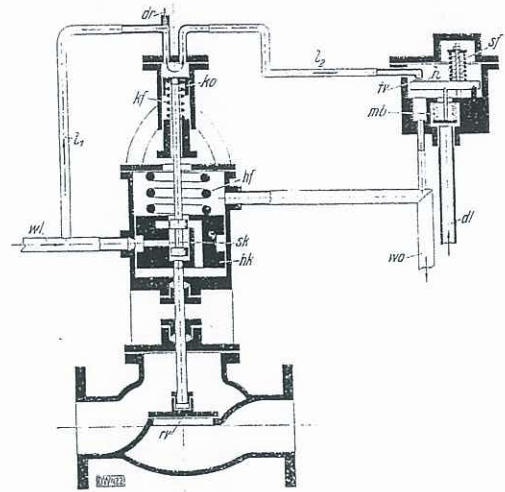
erst durch
r Druckluft
hrt. Dieser
zu dem An-
l die Sitz-
n den Dreh-
len Steuer-
kammern *ka*
und gleich-
rich Hand-
e und *a*, die
kammern *ku*
it auch den
befindliche
e. Ist der
gedreht, so
chzeitig die
dem Konus
er herunter-
Rückwärts-
chalteneinrich-

ist eine Öl-
Dämpfungs-
verbunden.
Zuführung *e*
verbunden.
Öl durch die
l durch Ein-
drosselt. In
mk die Zu-
auf die Un-
h dieses Öl-

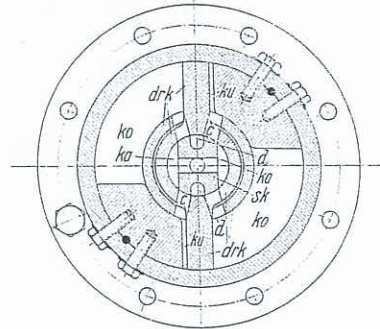
r, der sonst im
digkeit benutzt

Abb. 8 (rechts). Der Arca-Regler

<i>wl</i>	Wasserleitung	<i>hk</i>	Hubkolben
<i>l₂</i>	Abzweigleitung	<i>sf</i>	Spannfeder
<i>l₁</i>	Abfluß	<i>h</i>	Hebel
<i>dr</i>	Drossel	<i>tv</i>	Tellerventil
<i>ko</i>	Kolben	<i>mb</i>	Membranbalg
<i>kf</i>	Kolbenfeder	<i>dl</i>	Druckleitung
<i>hf</i>	Hubfeder	<i>wa</i>	Wasserablauf
<i>sk</i>	Steuerkolben	<i>rv</i>	Reguliertventil



Schnitt A-A



Schnitt B-B

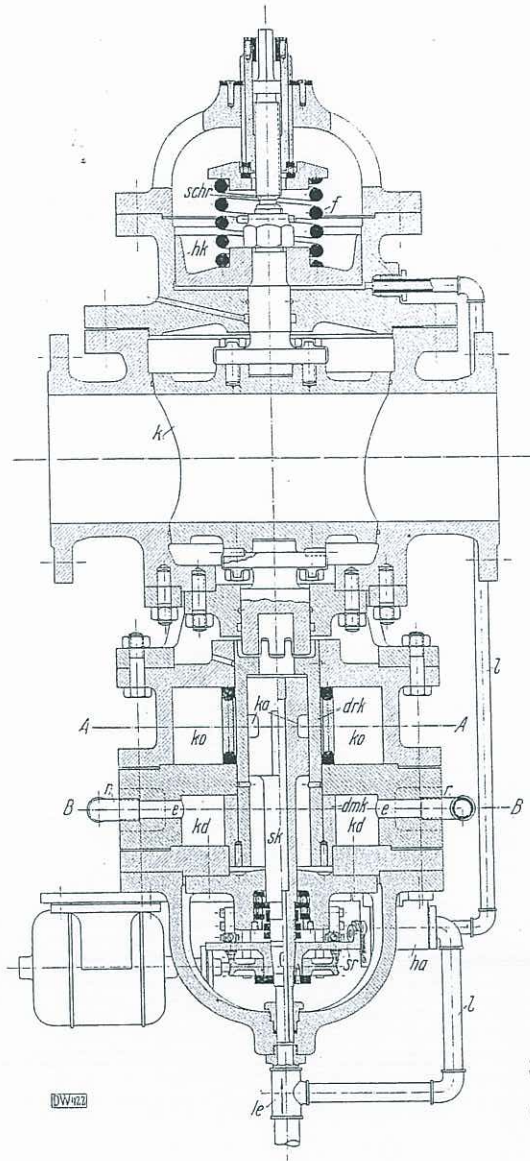
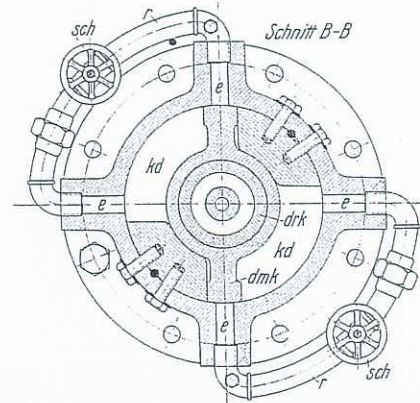


Abb. 9. Der Schnellschlußbahn

<i>sr</i>	Steuerrad	<i>l</i>	Druckluftleitung
<i>ha</i>	Hahn	<i>hk</i>	Hubkolben
<i>f</i>	Konus	<i>f</i>	Feder
<i>schr</i>	Anschlag	<i>dmk</i>	Dämpfungs-kolben
<i>drk</i>	Drehkolben	<i>kd</i>	Ölkammer
<i>sk</i>	Steuerkolben	<i>le</i>	Druckluftzuführung
<i>ka</i>	Kammer des Steuerkolbens	<i>le</i>	Rohrleitung
<i>e, d</i>	Schlitze	<i>sch</i>	Schieber
<i>ku, ko</i>	Druckluftkammer	<i>e</i>	Ölzuführung

3. Versuche

a) Mengenmessungen

Die Mengenmessungen bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 300 \cdot 10^3$ sind im Meßbottich vorgenommen. Da die Gewähr, daß der Meßbottich genau zylindrisch war, nicht gegeben war, mußte derselbe geeicht werden. Eine abgewogene Wassermenge wurde in den Bottich getan und die Wasserhöhe im Wasserstand abgelesen. Die Eichung ergab überall einen gleichen Durchmesser. Der Querschnitt des großen Meßbottichs betrug $F = 7850 \text{ cm}^2$, der des kleinen $F = 248 \text{ cm}^2$. Bei jeder Messung wurde vorher der niedrigste Stand abgelesen und nach dem Einlauf

der höhere. Die Ablesungen geschahen bei vollkommen ruhigem Wasser mit einem Spiegel, um Parallaxe zu vermeiden. Diese Art der Ablesung ermöglichte eine Genauigkeit von 0,1 bis 0,2 mm. Mittels des schwenkbaren Auslaufes konnte das Wasser in etwa 0,1 bis 0,2 s zum Meßbottich geführt werden. Die Dauer des Einlaufens in den Meßbottich wurde mit einer Handstoppuhr festgestellt. Die Stoppuhr ist auf ihren Gang geprüft worden und hatte $\frac{1}{10}$ s Einteilung. Der schwenkbare Auslauf konnte dann mit gleicher Geschwindigkeit zurückgedreht werden. Die Dauer des Einlaufens lag zwischen 100 und 600 s. Nehmen wir an, daß bei einer Meßdauer von 100 s auf 0,2 s genau gemessen ist, ferner, daß die Wasserhöhe im Wasserstand auf 0,2 mm genau abgelesen ist, so betrug im ungünstigsten Falle der Fehler in der Mengemessung 0,3 %. Dieser Fehler ging bei einer Meßdauer von 600 s auf 0,05 % zurück. Der größte Fehler der Mengemessung bringt für die mittlere Geschwindigkeit u einen Fehler von 0,13 %. Die Menge wurde als Mittel von mehreren Beobachtungen (4 bis 6) und zeitweise von zwei Beobachtern festgestellt.

b) Temperaturmessungen

Im allgemeinen wurde die Temperatur mit einem Thermometer am Auslauf gemessen. Um die Gewähr zu haben, daß das Wasser im Rohr dieselbe Temperatur wie am Auslauf hatte, wurde auch das durch den Entlüftungshahn *eh* (Abb. 4) ausfließende Wasser gemessen. Es zeigte sich immer Übereinstimmung. Das Thermometer war geeicht und in Zehntel Grade geteilt. Somit konnte etwa $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{30}$ ° abgeschätzt werden, wodurch ein Fehler der kinematischen Zähigkeit von 0,05 bis 0,08 % bedingt war. Bei den höheren Temperaturen ist der Fehler in der kinematischen Zähigkeit noch geringer. Die Messungen wurden vorgenommen bei Temperaturen von 9° bis 38°C. Bei gewöhnlicher Wassertemperatur ist die Unveränderlichkeit der Temperatur leicht zu erzielen; bei höherer dagegen bestand eine gewisse Schwierigkeit. Wie erwähnt, wurden die höheren Temperaturen dadurch erreicht, daß aus einem Kessel das Wasser von 80 bis 90°C in den Vorratskanal *vk* floß (500 bis 800 cm³/s). Durch Vorversuche wurde gefunden, welche Menge und Temperatur dieses Wassers nötig war, um eine bestimmte Temperatur des Versuchswassers während der Versuche dauernd zu erhalten. Entsprechend dem Zulauf floß durch den Ablauf *af* (Abb. 1) von der tiefsten Stelle des Vorratskanals *vk* abgekühltes Wasser ab.

c) Bestimmung des Rohrhalmessers

Bezieht man das Druckgefälle $\frac{dp}{dx}$ auf den Staudruck der mittleren Geschwindigkeit $\bar{q} = \rho \frac{\bar{u}^2}{2}$, so erhält man die dimensionslose Zahl λ , die als Widerstandszahl bezeichnet wird.

$$\lambda = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{2r}{\bar{q}} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{4\pi^2}{\rho Q^2} \cdot r^5,$$

wobei ρ die Dichte des Wassers,
 Q die Durchflußmenge in der Zeiteinheit,
 r der Rohrhalmesser ist.

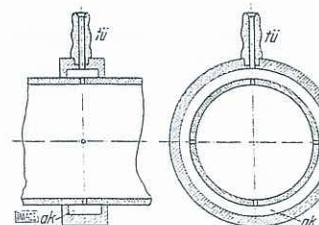
Aus dieser Formel ergibt sich, daß die Widerstandszahl λ , die aus unseren Versuchen bestimmt werden soll, proportional der fünften Potenz des Rohrhalmessers ist. Deshalb war eine möglichst genaue Bestimmung desselben nötig. Aus dem Gewicht des Wassers, welches das Versuchsrohr ganz ausfüllte, und der Länge des Rohres wurde der Rohrhalmesser bestimmt. Die Gewichtsbestimmung erfolgte mit einer Genauigkeit von $\pm 0,01$ %. Die Länge konnte bis auf 0,2 mm genau gemessen werden, was einem Fehler von $\pm 0,007$ % entspricht. Wenn man die Fehler des Gewichtes und der Rohrlänge im ungünstigsten Falle

rechnet, so wird der Rohrhalmesser r um 0,01 % falsch. Dieser Fehler ist für die Bestimmung der Widerstandszahl λ belanglos.

d) Statische Druckmessungen

Die Messung des statischen Druckes ist unter der Voraussetzung gemacht, daß der statische Druck im ganzen Meßquerschnitt gleich ist. Da der statische Druck in sauber ausgeführte Wandanbohrungen ziemlich genau gemessen werden kann, wenn die Wand parallel zur Strömungsrichtung ist, sind die Messungen des Druckabfalls vorgenommen worden. In jedem Meßquerschnitt waren Versuchsrohr vier Anbohrungen angebracht, die durch ringförmige Ausgleichskammer *ak* (Abb. 10) in Verbindung standen. Mittels Tülle *tü* und Schlauch konnte Verbindung mit dem Manometer hergestellt werden. freie Schenkel des Manometers wurde mit dem nächsten Meßquerschnitt ebenso verbunden. Auf diese Weise wird

Abb. 10
Meßquerschnitt für
Messung des statischen Druckes
ak Ausgleichskammer
tü Tülle



der Druckabfall über eine Meßstrecke l gemessen. oft tritt durch Anbohrungen, die nicht einwandfrei eine Saug- oder Druckwirkung auf. (Die Erhebung liefert eine Saugwirkung und die Vertiefungen eine Druckwirkung). Um eine fehlerfreie Ablesung des Druckabfalls zu bekommen, wurde die günstigste Form der Anbohrung gesucht und als solche die scharfkantige Form festgesetzt. Um auch den Einfluß der Größe der Anbohrungen zu untersuchen, wurden zunächst Anbohrungen von 0,5 mm angebracht und allmählich bis 1,2 mm Dmr. erweitert. wurde gefunden, daß jedenfalls im untersuchten Bereich die Größe der Anbohrungen ohne Einfluß auf die Druckabfallanzeige ist.

Bei der Herstellung der scharfkantigen Anbohrung wurde ein genau passender Messingbolzen im Rohr an Bohrstelle geschoben. Dadurch wurde starke Gratbildung und Einbeulung verhindert. Durch Nachpolieren mit einem feinen Schmirgelpapier versehenen Holzbohlen wurde der letzte Grat leicht entfernt. Probeweise wurde Bohrstelle aufgeschnitten und mit einem Mikroskop 50facher Vergrößerung nachgemessen. Ein Grat konnte nicht festgestellt werden.

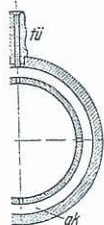
Vor Anbringung der Ausgleichskammern wurden Bohrungen einzeln auf ihre Güte untersucht. Es wurde je zwei Anbohrungen über ein Mikromanometer verbunden. Die Prüfung wurde nun bei größten erreichbaren Durchflüssen vorgenommen, um etwaige Fehler möglichst groß zu bekommen. Falls solche auftraten, wurde das Rohr nachpoliert.

Ferner wurden die Druckdifferenzen über zwei Strecken l_1 und l_2 gemessen. Die Druckabfallangaben wurden nur dann als richtig angesehen, wenn bei gleicher Länge der beiden Meßstrecken gleiche Druckdifferenzen gemessen wurden. Um einen Fehler bei Gleichheit der Druckdifferenzen auszugleichen, wurde das Rohr bezüglich Strömungsrichtung umgedreht. Dann mußte bei gleicher Reynoldszahl dieselbe Druckdifferenz angegeben werden.

Um größere Genauigkeit bei der Auswertung des Druckgefälles zu erreichen, wurden stets längere

0% falsch.
Inderstands-

1 der Vor-
im ganzen
ruck durch
genau ge-
l zur Strö-
kabfalls so
waren im
durch eine
in Verbin-
konnte die
rden. Der
n nächsten
weise wurde



essen. Sehr
ndfrei sind,
Erhebungen
eine Druck-
druckabfalls
Anbohrung
festgestellt.
ungen fest-
5 mm Dmr.
rweitert. Es
ten Bereich
die Druck-

anbohrungen
Rohr an die
Gratbildung
n mit einem
solzen wurde
wurde eine
kroskop mit
Grat konnte

wurden die
Es wurden
r verbunden.
aren Durch-
möglichst
rde das Rohr

zwei Meß-
ngaben wur-
bei gleicher
ifferenzen ge-
it der Druck-
ezüglich der
bei gleicher
z angezeigt

ng notwendi-
längere Meß-

strecken genommen, wie aus Zahlentafel 1 ersichtlich ist. Die Länge der Meßstrecken wurde auf 0,2 mm genau bestimmt. Die Druckdifferenzen wurden bis zu 50 cm W.-S. bzw. Qu.-S. mit einem Mikromanometer der beschriebenen Art gemessen. Größere Druckdifferenzen wurden mit einem normalen Quecksilber-U-Manometer von 250 cm Höhe ermittelt.

e) Geschwindigkeitsmessungen

Die Messungen der Geschwindigkeit sind so durchgeführt, daß der Staudruck des Pitotrohres gegen den statischen Druck der Druckanbohrung, welche im Meßquerschnitt lag und 2 mm vom Strahlrand entfernt war, geschaltet wurde, so daß das Manometer direkt den dynamischen Druck anzeigte. Die Geschwindigkeit wurde mit der Formel

$$u = 44,3 \sqrt{h} \quad \text{cm/s} \quad (1)$$

gerechnet, wobei h die gemessene dynamische Druckhöhe in cm W.-S. und u die Geschwindigkeit in cm/s bedeuten.

Diese Formel ist aus der Bernoullischen Gleichung, die man aus der Eulerschen Bewegungsgleichung für reibungslose, nur der Schwere unterworfenen Flüssigkeiten durch Integration längs einer Stromlinie erhält, gewonnen. Die Bernoullische Gleichung nimmt dann folgende Form an

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + H = \text{const}, \quad (2)$$

wo H die Höhe des betrachteten Punktes über einer beliebig gewählten waagerechten Ebene bedeutet.

Durch Multiplikation der Bernoullischen Gleichung mit der Dichte ρ erhält man die Druckgleichung

$$p + \rho \frac{u^2}{2} + \rho H = p_0. \quad (3)$$

Sieht man von äußeren Kräften (Schwere) ab (da H in unserem Falle an beiden Sondenöffnungen denselben Wert besitzt), so wird die Druckgleichung

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = p_0. \quad (4)$$

p_0 ist der Wert des größten Druckes, der sich in der Mündung des Pitotrohres einstellt. Er entspricht der Geschwindigkeit Null und heißt Gesamtdruck; p ist der statische Druck. Bezeichnet man $p_0 - p = h\gamma$ (mit γ = Raumgewicht und h = Höhe der Manometersäule), so erhält man aus Gl. (4)

$$\rho \frac{u^2}{2} = h\gamma \quad (5)$$

oder mit

$$\rho = \frac{\gamma}{g}$$

$$u = \sqrt{2g h} = 44,3 \sqrt{h} \quad \text{cm/s.}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung wurde mit einem Pitotrohr 0,1 bis 0,2 mm hinter dem Austrittsquerschnitt des Versuchsrohres gemessen. Die Zuverlässigkeit der Messung in diesem Abstand hinter dem Austrittsquerschnitt ergibt sich aus Vergleichen mit den Geschwindigkeitsverteilungen, die 2 und 5 mm vor dem Austrittsquerschnitt gemessen wurden (Abb. 11). Eine nachträgliche Messung der Geschwindigkeiten bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen in der Rohrachse beim Austritt und gleichzeitig 20 d vor dem Austritt ergab gleiche Werte. Die Messungen sind deshalb hinter dem Austrittsquerschnitt vorgenommen, um Druckfeldstörungen im Rohr zu vermeiden, vor allem aber auch, weil man nur auf diese Weise die Geschwindigkeiten bis unmittelbar an die Rohrwand heran messen kann.

Da die Kenntnis des statischen Druckes im Meßquerschnitt für die Messung der Geschwindigkeitsverteilung sehr wichtig war, wurde diese Vergleichsmessung mit einer Sonde ausgeführt, die an Stelle des Pitotrohres eingebaut war. Um den Einfluß des Pitotrohrhalters auf den statischen Druck tunlichst auszuschließen, wurde eine Verkleidung (Abb. 5) mit symmetrischem Profil so angebracht, daß die Sonde in der Symmetrieachse des Profils lag. Die

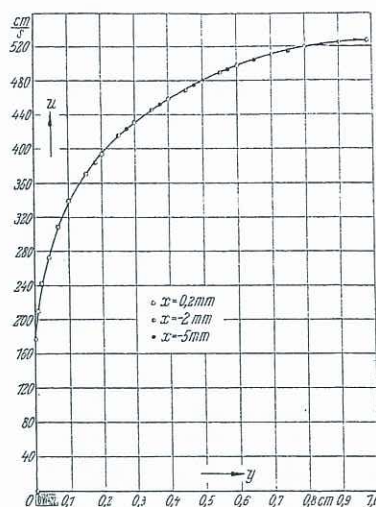


Abb. 11. Die Geschwindigkeitsverteilungen bei $x = 0$ mm, $x = -2$ mm und $x = -5$ mm

seitlichen Anbohrungen der Sonde lagen im Meßquerschnitt. Die Sonde war mit einer Anbohrung der Wand, die ebenfalls im Meßquerschnitt lag, über ein Mikromanometer verbunden. Da ein Druckunterschied im Manometer nicht festzustellen war, kann man den Schluß ziehen, daß der statische Druck auch außerhalb des Strahles gleich groß war. Deshalb ist es berechtigt, den statischen Druck bei Geschwindigkeitsmessungen durch Anbohrungen im Flansch zu messen. Ferner wurde durch Geschwindigkeitsmessungen im Rohr von 5 cm Dmr. und 500 cm ursprünglicher Länge ein solcher Wert $\frac{x}{d}$ (wobei x die Rohrlänge, d der Rohrdurchmesser ist) gesucht, bei dem Unabhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung von der Rohrlänge eintrat. Zu diesem Zwecke wurden die Geschwindigkeitsverteilungen bei der Reynoldsschen Zahl $Re = 900 \cdot 10^3$ und bei $\frac{x}{d} = 100, 65$ und 40 aufgenommen, was durch Abschneiden des Rohres auf diese Längen geschah. Bei allen diesen Werten wird die Geschwindigkeitsverteilung unabhängig von der Rohrlänge. Da bei den Hauptversuchen die kürzeste Anlaufstrecke $\frac{x}{d} = 50$ war, konnte von weiteren Untersuchungen Abstand genommen werden. Dieses Ergebnis ist in dimensionsloser Darstellung in Abb. 12 wiedergegeben.

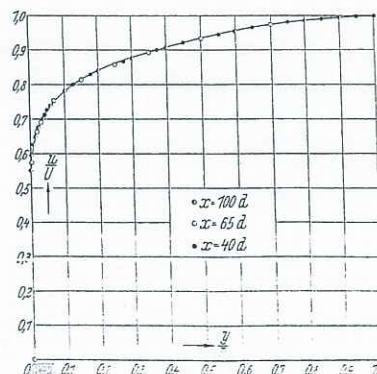


Abb. 12. Die Geschwindigkeitsverteilungen bei $x = 100 d$, $x = 65 d$ und $x = 40 d$

Für die Messungen der Geschwindigkeitsverteilung sind Pitotrohre von 0,21 mm und 0,30 mm Innendurchmesser und 30 mm Länge, die aus strömungstechnischen Gründen konisch waren, benutzt. In Abb. 13 ist die Stellung der Pitotrohre am Rande des Versuchrohres gezeigt. In dieser Stellung entspricht die Angabe des Pitotrohres nicht dem dort herrschenden dynamischen Druck. Das erklärt sich dadurch, daß nur ein Teil der Pitotrohröffnung im Wasserstrahl und der andere außerhalb desselben liegt, so daß das eingeströmte Wasser seitlich wieder ausströmt. Da aber die genaue Kenntnis des dynamischen Druckes auch in der Nähe der Wand von Bedeutung ist, wurde ein Verfahren angewandt, das die Berechtigung der Geschwindigkeitsmessung in diesem Gebiet möglich macht. Zu diesem

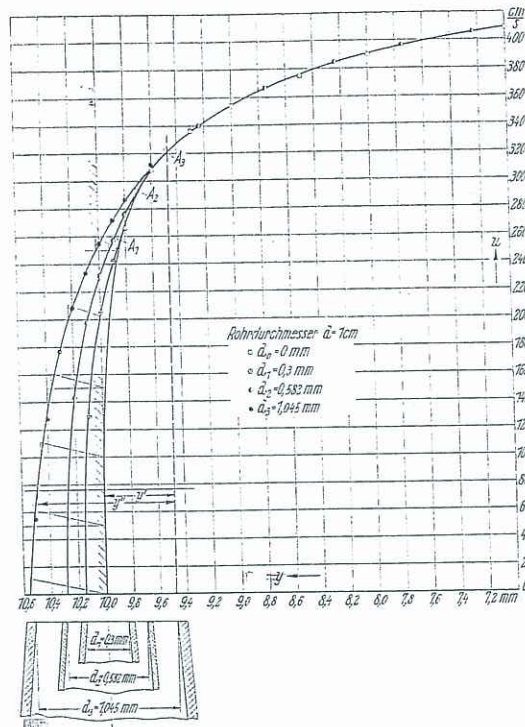
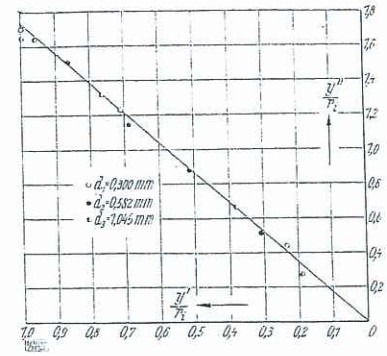


Abb. 13. Reduzierung der Pitotrohröffnung auf Null

Zwecke ist mit drei Pitotrohren verschiedener Innendurchmesser, nämlich 0,3, 0,582 und 1,045 mm bei ein und derselben Reynoldsschen Zahl die Geschwindigkeitsverteilung gemessen. Diese Messungen dienten dazu, durch Extrapolation die Geschwindigkeitsverteilung zu bestimmen, die man mit dem Pitotrohre vom Durchmesser Null gemessen hätte. In Abb. 13 ist der Abstand von der Wand als Abszisse und die Geschwindigkeit als Ordinate aufgetragen. Legt man eine Gerade durch Punkte gleicher Geschwindigkeit (parallel der Abszissenachse) und trägt in den einzelnen Punkten die zugehörigen Innendurchmesser der Pitotrohre als senkrechte Strecken auf, so läßt sich durch die Endpunkte dieser Strecken eine Kurve legen, die durch Extrapolation einen Schnittpunkt mit der Geraden liefert. Dieser ist ein Punkt einer neuen Kurve, die der Geschwindigkeitsverteilung entspricht, welche man mit dem Pitotrohr vom Innendurchmesser Null erhalten würde. Liegt die Pitotrohröffnung ganz im Wasserstrahl, so ergibt sich, wie Abb. 13 zeigt, eine Berechtigung.

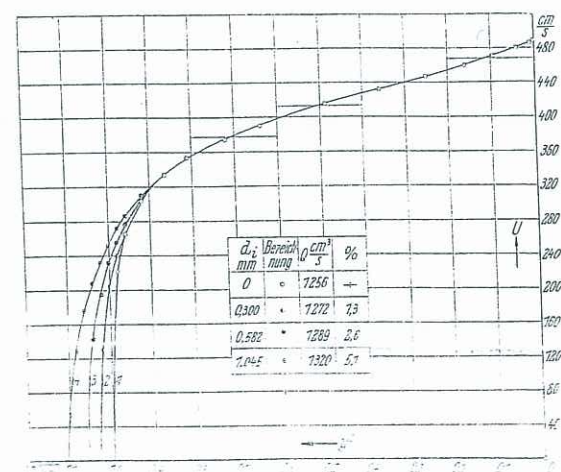
Für diese Stellung trifft die gemessene Geschwindigkeitskurve mit der theoretischen Kurve in Punkt A₁ ($i=1, 2, 3$) zusammen. Die Entfernung des Punktes A₁ von der Wand ist also gleich dem Innendurchmesser d_i

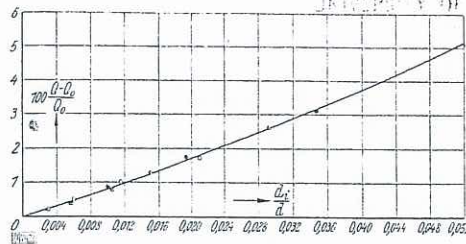
Abb. 14. $\frac{u'}{v_1}$ in Abhängigkeit von $\frac{y'}{r_1}$

($i=1, 2, 3$) der zur Messung benutzten Öffnung des Pitotrohres. Um die Korrektur für beliebige Pitotrohröffnungen zu ermitteln, zieht man durch einen solchen Punkt A₁ eine Senkrechte zur Abszissenachse (in der Abb. gestrichelt) und bestimmt die Abstände y' und y'' dieser Geraden von zwei Punkten der theoretischen und der gemessenen Kurve, die gleicher Geschwindigkeit entsprechen.

Auf diese Weise sind für verschiedene Reynoldssche Zahlen Wertepaare ermittelt, die in dimensionsloser Darstellung in Abb. 14 wiedergegeben sind. Hat man eine Geschwindigkeitsverteilung gemessen, und will man dieselbe in der Nähe der Wand auf die Geschwindigkeitsverteilung bringen, die man erhalten würde, wenn man die Pitotrohröffnung Null hätte, so benutzt man diese Abbildung in der Weise, daß man die Geschwindigkeiten, die in dem Abstand y'' liegen, auf den entsprechenden Abstand y' verschiebt.

Um den prozentualen Fehler der Durchflußmenge festzustellen, welcher durch Integration der nichtkorrigierten Geschwindigkeitsverteilungen gewonnen wird, wurden in Abb. 15 die gemessenen Geschwindigkeiten, die durch die Messungen mit verschiedenen Pitotrohröffnungen erhalten sind, in Abhängigkeit vom Quadrat des Abstandes von der Rohrachse aufgetragen und durch graphische Integration die Durchflußmenge berechnet. Die korrigierte Geschwindigkeitsverteilung ist durch die Kurve 1 dieser Abbildung dargestellt. Die Kurven 2, 3 und 4 entsprechen der Geschwindigkeitsverteilung, welche für die Messungen in Pitotrohren von der Öffnung $d=0,3$ mm, 0,582 mm und

Abb. 15. $100 \left(\frac{Q - Q_0}{Q} \right) = f(d_i)$

Abb. 16. $100 \left(\frac{Q - Q_0}{Q} \right) = f \left(\frac{d_i}{d} \right)$

1,054 mm ermittelt ist. Die Zahlenzusammenstellung der Abb. 15 zeigt, daß die Durchflußmenge der korrigierten Geschwindigkeitsverteilung $Q_0 = 1256 \text{ cm}^3/\text{s}$ beträgt. Außerdem sieht man, daß mit zunehmender Pitotrohröffnung die graphisch ermittelte Durchflußmenge gegenüber der gemessenen Durchflußmenge (die mit der graphisch ermittelten der korrigierten Kurve übereinstimmt) zunimmt. Die in Abb. 15 dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen sind in einem Rohr mit dem Durchmesser $d = 2 \text{ cm}$ gemessen. Ähnliche Versuche sind in Rohren mit den Durchmessern $d = 3 \text{ cm}$, $d = 5 \text{ cm}$ und $d = 10 \text{ cm}$ gemacht und die Ergebnisse in Abb. 16 dargestellt. Hier ist als Abszisse die dimensionslose Pitotrohröffnung $\frac{d_i}{d}$, welche durch Division des Durchmessers der Pitotrohrspitze mit dem Rohrdurchmesser gebildet ist, und als Ordinate der prozentuale Fehler der Durchflußmenge $100 \left(\frac{Q - Q_0}{Q} \right)$ aufgetragen. Dieses Diagramm gestattet, bei einem bestimmten Verhältnis $\frac{d_i}{d}$ die auftretenden Fehler anzugeben.

4. Durchführung der Versuche

Die Durchführung der Versuche mit Überlauf war sehr einfach, da für die Unveränderlichkeit der Durchflußmenge gesorgt war. Wollte man die Messungen der Geschwindigkeitsverteilung vornehmen, so stellte man den Drosselkegel dk (Abb. 5) des Geschwindigkeitsmeßapparates auf eine bestimmte Stellung ein, die der gewünschten Durchflußmenge entsprach (die Abhängigkeit der Durchflußmenge von der Drosselstellung des Geschwindigkeitsmeßapparates war durch Vorversuche bekannt). Dann ließ man durch die Wasserleitung soviel Wasser in den Wasserkessel, daß durch den Überlauf nur ganz wenig

Wasser abfloß. War das Mikromanometer I, welches für die Druckabfallmessungen, und das Mikromanometer II, das für die Geschwindigkeitsmessungen diente, auf die Richtigkeit ihrer Anzeige geprüft, so stellte man durch die Geschwindigkeitsmessungen die Rohrachse fest, die bei den eigentlichen Messungen als Bezugspunkt galt. Dann wurden die Messungen begonnen, die darin bestanden, daß man neben den Geschwindigkeitsmessungen die Messungen des Druckabfalls, der Temperatur und der Durchflußmenge vornahm.

Die Versuche bei Kreislauf des Wassers waren insofern schwieriger, als Stromschwankungen im elektrischen Netz Änderung der Drehzahl des Antriebsmotors und damit Änderungen der Durchflußmenge im Versuchsrohr verursachten. Deshalb war es erforderlich, den Druckabfall durch die Feinregulierung des Drosselkegels dk auf gleichem Stand zu halten.

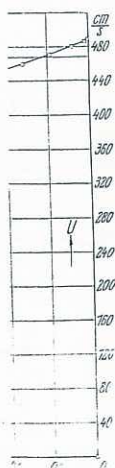
Die Durchführung der Messungen bei den Stoßversuchen erfolgte so, daß man zunächst die Verbindung zwischen Wasserkessel wk (Abb. 1) und dem Druckluftkessel dk unterbrach und dann die Druckluft, welche sich vom vorhergehenden Versuch im Wasserkessel befand, durch das Sicherheitsventil ksv des Wasserkessels entweichen ließ. Während man mittels eines Kompressors die Druckluft im Druckluftkessel dk bei allen Messungen auf etwa 10 at brachte, wurde die Verbindung zwischen der Kreiselpumpe kp und dem Wasserkessel wk hergestellt und dieser dann bis zu einer bestimmten Höhe mit Wasser gefüllt. Inzwischen wurde der Austrittsquerschnitt des Versuchsrohres mit Ölpapier abgedichtet, welches sich zwischen dem Flansch des Versuchsrohres und einem zum Rohrquerschnitt passenden Ringflansch befand, und nun mit Hilfe einer Umleitung am Schnellschlußhahn sh das Zuleitungsrohr zr und das Versuchsrohr vr mit Wasser gefüllt. Die im Zuleitungsrohr befindliche Luft konnte durch das geöffnete Schnüffventil sv entweichen. Nun wurde noch die Verbindung zwischen dem Druckluftkessel dk und dem Wasserkessel wk über den Area-Regler hergestellt, der vorher auf einen bestimmten Druck eingestellt war. Damit war die Vorbereitung beendet und der eigentliche Versuch konnte beginnen. Auf ein Zeichen des Manometerbeobachters wurde der Schnellschlußhahn sh geöffnet; das Ölpapier wurde vom Wasserdruck zerrissen. Nach eingetretenem Beharrungszustand der Strömung stellte der Beobachter die Grenze der Manometerrausschläge mittels der Läufer fest, die am Schenkel des Manometers leicht verschiebbar waren (Abb. 3). Der Schnellschlußhahn blieb geöffnet, bis der Wasserspiegel im Wasserkessel auf etwa 40 bis 50 cm über den Austrittsquerschnitt gesunken war. Dann wurden die Manometer abgelesen. Nun konnte mit den Vorbereitungen für den nächsten Versuch begonnen werden.

II. Auswertung der Versuche

1. Geschwindigkeitsverteilung

Die Geschwindigkeitsverteilungen sind in Rohren von $d = 1 \text{ cm}$, 2 cm , 3 cm , 5 cm und 10 cm Dmr. von kleinen Reynoldsschen Zahlen $Re = 4 \cdot 10^3$ bis zur größten von uns untersuchten Reynoldsschen Zahl $Re = 3240 \cdot 10^3$ gemessen. Wie aus den weiteren Auswertungen der Geschwindigkeitsverteilung zu ersehen sein wird, ist die genauere Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung wichtig nicht nur in der Nähe der Wand, wo ein starkes Geschwindigkeitsgefälle vorhanden ist, sondern auch in der Nähe der Rohrmittte, wo ein geringes Geschwindigkeitsgefälle herrscht. Deshalb sind die Meßpunkte in der Nähe der Wand und in der Nähe der Rohrmittte besonders dicht gewählt worden (die Geschwindigkeitsverteilung

über den Rohrhalmmesser enthält im allgemeinen 18 Meßpunkte). Die Geschwindigkeitsverteilung war symmetrisch und zeigte für einen bestimmten Abstand von beiden Seiten der Rohrachse entweder keine oder nur geringe Unterschiede. Es sind etwa 150 Geschwindigkeitsprofile gemessen worden, von denen aber für die vollständigen Auswertungen nur 16 Profile benutzt worden sind. Wegen der völligen Symmetrie der Geschwindigkeitsprofile ist für die Auswertung immer nur eine Hälfte des Profils benutzt worden. Die Zahlenwerte dieser 16 Geschwindigkeitsverteilungen über den Rohrhalmmesser sind in Zahlentafel 2 zusammengestellt. Um die Geschwindigkeitsverteilungen bei möglichst kleinen Reynoldsschen Zahlen zu ermitteln, ist der Einlauf des Rohres von 10 mm Dmr. mit einer Platte, die eine Öffnung



Zahlentafel 2

 u in Abhängigkeit von y

$\frac{d_p}{d_x} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$	0,0595	0,1210	0,245	0,723	1,255	—	0,365	—	0,495	—	0,247
$\bar{u}$ cm/s	54,5	81,8	123,5	225,5	315	—	258,2	—	400	—	394
r cm ² /s	0,0135	0,0135	0,0135	0,0135	0,0135	—	0,0119	—	0,0114	—	0,0096
$10^{-3} Re$	4,0	6,1	9,2	16,7	23,3	—	43,4	—	105	—	205
y cm	u cm/s	u cm/s	u cm/s	u cm/s	u cm/s	y cm	u cm/s	y cm	u cm/s	y cm	u cm/s
0,00	20,2	35,0	47,0	112,0	117,0	0,00	102,0	0,00	204,0	0,00	178,0
0,005	28,0	46,0	72,0	140,0	174,0	0,01	155,0	0,015	258,0	0,025	258,0
0,010	35,0	53,0	81,5	163,0	214,0	0,02	183,0	0,030	280,0	0,050	281,0
0,020	39,8	60,2	92,0	179,0	242,0	0,04	203,0	0,060	313,0	0,100	312,0
0,035	44,4	67,2	102,0	193,0	263,0	0,07	220,0	0,105	339,0	0,175	335,0
0,050	47,0	71,2	108,0	202,5	277,0	0,10	230,0	0,150	356,0	0,250	352,0
0,075	50,2	76,1	116,0	214,5	294,0	0,15	242,5	0,225	375,0	0,375	371,0
0,10	52,7	79,7	121,0	223,0	306,0	0,20	252,0	0,30	390,0	0,500	387,0
0,15	56,6	85,2	128,5	236,5	326,0	0,30	267,0	0,45	415,0	0,750	407,0
0,20	59,5	89,2	134,5	247,0	341,0	0,40	278,5	0,60	433,0	1,00	422,0
0,25	61,7	92,5	139,0	255,0	353,0	0,50	287,0	0,75	446,0	1,25	434,0
0,30	63,5	95,0	142,5	261,5	362,0	0,60	294,5	0,90	458,0	1,50	444,0
0,35	65,0	97,3	146,0	267,0	370,0	0,70	300,0	1,05	466,0	1,75	453,0
0,40	66,4	99,2	148,5	271,6	376,0	0,80	304,5	1,20	473,0	2,00	459,0
0,45	67,4	100,7	151,0	275,5	381,0	0,90	308,7	1,35	479,0	2,25	464,5
0,48	67,9	101,4	152,0	277,2	382,7	0,96	309,6	1,44	481,0	2,40	467,0
0,49	68,0	101,7	152,3	277,5	383,1	0,98	310,0	1,47	481,5	2,45	467,5
0,50	68,1	101,8	152,5	278,0	383,5	1,00	310,5	1,50	482,0	2,50	468,0
$\frac{d_p}{d_x} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$	0,755	—	0,48	0,91	1,59	2,45	1,90	2,262	2,82	—	—
$\bar{u}$ cm/s	732	—	875	1245	1690	2150	1928	2145	2430	—	—
r cm ² /s	0,00925	—	0,0121	0,01125	0,011	0,011	0,0082	0,0077	0,0075	—	—
$10^{-3} Re$	396	—	725	1110	1536	1959	2350	2790	3240	—	—
y cm	u cm/s	y cm	u cm/s	u cm/s	u cm/s	u cm/s	u cm/s	u cm/s	u cm/s	u = jeweilige Geschwindigkeit y = Abstand von der Wand; Re = Reynoldssche Zahl; $\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit; d = Rohrdurchmesser; ν = kinematische Zähigkeit.	
0,00	360	0,000	505	705	950	1310	1310	1423	1510		
0,025	490	0,05	617	847	1160	1598	1426	1578	1794		
0,05	546	0,10	654	918	1260	1685	1496	1666	1890		
0,10	597	0,20	717	1026	1380	1805	1604	1758	2026		
0,175	632	0,35	765	1084	1480	1896	1700	1890	2142		
0,250	660	0,50	794	1133	1549	1966	1772	1967	2230		
0,375	690	0,75	833	1190	1613	2050	1845	2060	2326		
0,500	714	1,00	859	1229	1668	2110	1900	2122	2396		
0,75	751	1,5	899	1284	1744	2204	1980	2212	2492		
1,00	778	2,0	929	1325	1799	2270	2040	2272	2566		
1,25	799	2,5	954	1359	1840	2325	2088	2322	2622		
1,50	816	3,0	973	1386	1876	2370	2125	2362	2670		
1,75	831	3,5	988	1407	1902	2410	2156	2392	2706		
2,00	842	4,00	1000	1424	1925	2437	2181	2418	2736		
2,25	851	4,5	1010	1436	1940	2456	2198	2436	2755		
2,40	854	4,8	1014	1441	1946	2463	2202	2445	2762		
2,45	855	4,9	1015	1442	1948	2465	2203	2448	2764		
2,50	856	5,0	1015,5	1443	1944	2466	2204	2449	2766		

von 6 mm Dmr. besaß, zentrisch abgedeckt. Die Platte bewirkte im Einlauf starke Wirbelung, so daß bei einer Reynoldsschen Zahl $Re = 4 \cdot 10^3$ die turbulente Strömung bereits voll ausgebildet war. Mit dieser Anordnung sind nur die drei kleinsten Reynoldsschen Zahlen gemessen worden.

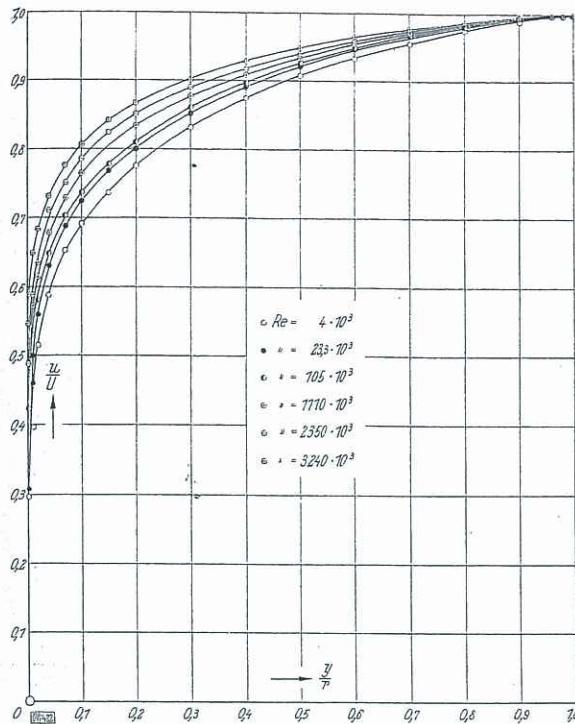
Um die Änderung der Form der Geschwindigkeitsverteilungen in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl zu verfolgen, sind die Geschwindigkeitsverteilungen in der

Weise dimensionslos gemacht, daß man die jeweiligen Geschwindigkeiten auf die maximalen Geschwindigkeiten die entsprechenden Wandabstände auf den Rohrradien bezogen hat. So erhielten wir die Beziehung

$$\frac{u}{\bar{u}} = f\left(\frac{y}{r}\right),$$

die in Abb. 17 für sechs Profile dargestellt ist, und y von den Reynoldsschen Zahlen $Re = 4 \cdot 10^3$ bis 3240.

0,247
394
0,0096
205
u cm/s
178,0
258,0
284,0
312,0
335,0
352,0
371,0
387,0
407,0
422,0
434,0
444,0
453,0
459,0
464,5
467,0
467,5
468,0

Abb. 17. $\frac{u}{U}$ in Abhängigkeit von y/r

Diese Darstellung zeigt sehr deutlich, daß mit steigenden Reynoldsschen Zahlen die Form der Geschwindigkeitsverteilung immer voller wird. Diese Tatsache führt zu der Annahme, daß bei unendlich großen Reynoldsschen Zahlen die durch die Reibung beeinflusste Schicht verschwindend klein wird. In Abb. 18 sind die Geschwindigkeitsverteilungen so dargestellt, daß man als Ordinate $\frac{u}{U}$, als Abszisse $\lg \left(\frac{u \cdot d}{\nu} \right)$ und als Parameter den dimensionslosen Wandabstand y/r gewählt hat. Die zu einem bestimmten Wandabstand y/r gehörigen Geschwindigkeiten $\frac{u}{U}$ sind durch eine Kurve miteinander verbunden, an welche der zugehörige y/r -Wert angeschrieben ist. Dieses Diagramm zeigt, daß für die in der Nähe der Wand liegenden Geschwindigkeiten eine merkliche Streuung auftritt. Will

man eine dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des gemessenen Bereiches haben, so liest man über der entsprechenden Reynoldsschen Zahl auf der Kurve für $\frac{u}{U}$ Werte in Abhängigkeit von y/r ab und erhält die gewünschte Geschwindigkeitsverteilung. Um zu prüfen, wie weit die von uns gemessenen mit den von anderen Forschern ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen übereinstimmen, sei folgender Vergleich angestellt.

Die bisher zuverlässigste Messung der Geschwindigkeitsverteilung in einem kreisförmigen Rohr ist die von T. E. Stanton¹⁶⁾, weil er erstens die Messungen mit einem sehr feinen Pitotrohr von 0,33 mm Dmr. vorgenommen hat und zweitens eine genügend lange geradlinige Anlaufstrecke $x = 72 d$ (x = Rohrlänge, d = Rohrdmr. = 7,4 cm) hatte, so daß die Messungen in dem Bereich lagen, in welchem sich die Geschwindigkeitsverteilung nicht mehr ändert. Ein Vergleich unserer Meßergebnisse mit denen von Stanton erschien um so notwendiger, da Stanton die Geschwindigkeitsverteilungen im Versuchsrohr kurz vor dem Austrittsende (2 bis 3 d) gemessen hat, während unser Meßquerschnitt 0,1 bis 0,2 mm hinter dem Austrittsende lag. Zu diesem Zweck sind die Geschwindigkeitsverteilungen, die annähernd zu den gleichen Reynoldsschen Zahlen gehören, in der Weise aufgetragen, daß man das Verhältnis der örtlichen Geschwindigkeiten u zur maximalen Geschwindigkeit U als Funktion des dimensionslosen Wandabstandes y/r (y = Abstand von der Wand, r = Rohrradius) genommen hat. Die Stanton'schen Messungen sind vorgenommen bei den Reynoldsschen Zahlen $Re = 37,6 \cdot 10^3$, $56 \cdot 10^3$ und $89,3 \cdot 10^3$. Unsere Messungen ergeben bei ungefähr denselben Reynoldsschen Zahlen eine gute Übereinstimmung mit der Geschwindigkeitsverteilung von Stanton. Abb. 19 zeigt den Vergleich der Geschwindigkeitsverteilung von Stanton ($Re = 56 \cdot 10^3$) mit unserer ($Re = 59 \cdot 10^3$). Dazu ist noch folgendes zu bemerken: Die Angaben über die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ und die kinematische Zähigkeit ν fehlen bei Stanton. Wir haben deshalb die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u} = 1235$ cm/s aus der Durchflußmenge, die durch Integration der Geschwindigkeitsverteilung ermittelt ist, bestimmt. Da die Messungen von Stanton mit Luft durchgeführt sind, bei der die Änderung der kinematischen Zähigkeit mit der Temperatur sehr gering ist, haben wir die kinematische Zähigkeit bei einer mittleren Laboratoriumstemperatur von 18°C angenommen.

Für sehr große Reynoldssche Zahlen erschien es uns zweckmäßig, die von Bazin¹⁷⁾ gemessenen Geschwindig-

16) T. E. Stanton, vgl. Fußnote 11, S. 2.

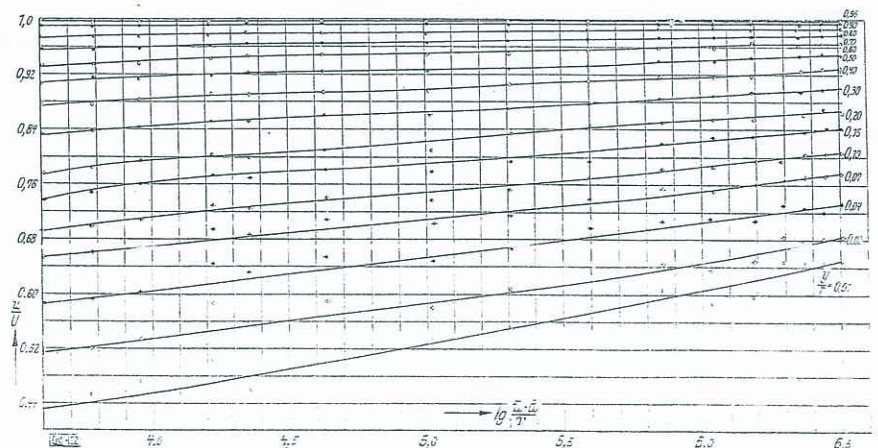
17) M. Bazin: Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, Bd. 32 (1902) Nr. 16.

weilige Ge-
windigkeit;
stand von
r Wand;
ynoldssche
hl;
ttlere Ge-
windigkeit;
rohrdurch-
messer;
nematische
higkeit.

weiligen Ge-
lichkeiten und
rohrabmesser

(6)

st. und zwar
is $3240 \cdot 10^3$.

Abb. 18
 $\frac{u}{U}$ in Abhängigkeit von
 $\lg \left(\frac{u \cdot d}{\nu} \right)$ 

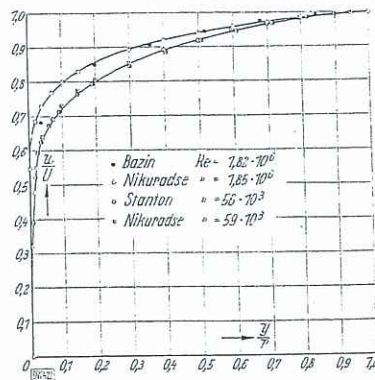


Abb. 19. Vergleich der Geschwindigkeitsverteilungen von Stanton, Bazin und Nikuradse

keitsverteilungen zum Vergleich heranzuziehen. Die Anlaufstrecke bei Bazin betrug etwa $x = 75 d$ ($d = 80$ cm). Angaben über die Temperatur und die mittlere Geschwindigkeit findet man auch bei ihm nicht. Deshalb ist von uns die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u} = 164,9$ cm/s durch Integration der Geschwindigkeitsverteilung ermittelt worden. Bazins Messungen sind im Freien mit Wasser durchgeführt, wo Temperaturschwankungen von 10° bis 20° auftraten. In diesem Temperaturbereich ist zwar die kinematische Zähigkeit von der Temperatur sehr stark abhängig, andererseits aber ist die Änderung der Geschwindigkeitsverteilung mit der Reynoldsschen Zahl bei so großen Reynoldsschen Zahlen, wie sie hier vorliegen, sehr gering. Aus diesen Gründen haben wir die kinematische Zähigkeit bei 15°C zugrunde gelegt ($\nu = 0,0113$ cm²/s).

Den Vergleich der Geschwindigkeitsverteilung von Bazin mit der von uns zeigt ebenfalls die Abb. 19. Abgesehen von den letzten von Bazin gemessenen, in Wandnähe liegenden Punkten, herrscht eine gute Übereinstimmung der Geschwindigkeitsverteilungen bei ungefähr denselben Reynoldsschen Zahlen.

2. Potenzgesetz

Prandtl¹⁸⁾ hat aus dem Blasius'schen Widerstandsgesetz geschlossen, daß sich die Geschwindigkeit u in der Nähe der Wand einer turbulenten Strömung mit der $1/7$ Potenz des Abstandes von der Wand ändert, d. h.

$$u = a y^{1/7}, \quad (7)$$

wobei a für ein und dasselbe Geschwindigkeitsprofil eine Konstante ist. Die Rechnung kann wie folgt geführt werden. In der Formel für die Widerstandszahl

$$\lambda = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{2d}{\rho \bar{u}^2} \quad (8)$$

setzt man statt des Druckgefälles $\frac{dp}{dx}$ die Schubspannung an der Wand τ_0 . Die Gleichgewichtsbedingung für einen Flüssigkeitszylinder mit dem Halbmesser r und der Länge dx liefert

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\tau_0}{r} \quad (9)$$

$$\text{also} \quad \lambda = \frac{2\tau_0}{r} \cdot \frac{2d}{\rho \bar{u}^2} \quad (8a)$$

Daraus folgt $\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\lambda \bar{u}^2}{8}$. Führt man für die Widerstandszahl λ den Blasius'schen Wert $\lambda_B = 0,316 Re^{-1/4}$ ein, so

^{18) Prandtl, L. Über den Reibungsbeiwert glatter Leitungen. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, III. Lieferung 1927, S. 1. — Th. v. Karman: Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 1, 1923, S. 205.}

$$\text{erhält man} \quad \frac{\tau_0}{\rho} = \text{Zahl} \cdot \bar{u}^2 \left(\frac{\bar{u} \cdot 2r}{r} \right)^{-1/4} \quad (10)$$

$$\text{oder} \quad \frac{\tau_0}{\rho} = \text{Zahl} \cdot \bar{u}^{7/4} r^{-1/4} \quad (11)$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach $\bar{u}$ ergibt

$$\bar{u} = \text{Zahl} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{4/7} \left(\frac{r}{r} \right)^{1/7} \quad (12)$$

Nach der Prandtl'schen Hypothese soll weder der Rohradius noch die Geschwindigkeit in der Mitte in eine unmittelbaren Verhältnis zur Wandreibung stehen, sondern diese soll in erster Linie durch die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand bestimmt sein.

Wenn das Verhältnis $\frac{\bar{u}}{U}$ von mittlerer Geschwindigkeit zu maximaler als fest angenommen wird, so folgt aus Gl. (11) auch

$$U = \text{Zahl} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{4/7} \left(\frac{r}{r} \right)^{1/7} \quad (13)$$

Diese Beziehung kann in eine von der verlangten Art umgeschrieben werden, wenn man y für r und entsprechend die y zugeordnete Geschwindigkeit u für U setzt

$$u = \text{Zahl} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{4/7} \left(\frac{y}{r} \right)^{1/7} \quad (14)$$

Da die Geschwindigkeitsverteilung bei einem festen Wert von $\frac{\tau_0}{\rho}$ und $r = \frac{d}{2}$ gemessen ist, erhält man aus Gl. (14)

$$u = \text{const } y^{1/7} \quad \text{oder} \quad u = a y^{1/7} \quad (15)$$

Wie nachträglich leicht nachgeprüft werden kann, ist der Geschwindigkeitsverteilung nach (13) auch Gl. (14) d. h. das Blasius'sche Gesetz erfüllt. Dieses Widerstandsgesetz

$$\lambda_B = \frac{0,316}{Re^{1/4}},$$

nach welchem also die Widerstandszahl umgekehrt proportional der 4. Wurzel aus der Reynoldsschen Zahl gilt bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 100 \cdot 10^3$. Da der Ableitung des $1/7$ -Potenzgesetzes dieses Blasius'sche Widerstandsgesetz zugrunde gelegt wurde, kann man nicht erwarten, daß dieses Potenzgesetz auch noch für höhere Reynoldssche Zahlen Gültigkeit hat. Im Gültigkeitsbereich des Blasius'schen Widerstandsgesetzes ist die Ableitung der logarithmischen λ -Kurve gleich $1/4$. Für höhere Reynoldssche Zahlen wird diese Neigung kleiner und nimmt in dem von uns untersuchten Bereich bis auf $1/6$ ab. Nimmt man z. B. λ proportional $Re^{-1/6}$, so erhält man die Rechenmethode wie oben $u = a y^{1/6}$. Das bedeutet, daß der Exponent $n = 1/7$ mit steigender Reynoldsschen Zahl auf $1/8$, $1/9$ usw. abnimmt. Bei der Reynoldsschen Zahl $Re = 3240 \cdot 10^3$ hat man etwa den Exponenten $n = 1/10$. Die Änderung des Exponenten mit wachsender Reynoldsscher Zahl wird dabei immer schwächer. Natürlich ist ein solches Potenzgesetz mit veränderlichem Exponenten nur als eine Näherungsformel zu betrachten. Auch im Blasius'schen Bereich erweist sich $1/7$ -Gesetz, wie die Ermittlungen erweisen werden, als eine Näherung. Schreibt man das Potenzgesetz der Form

$$u = a y^n$$

und trägt den $\lg$ der gemessenen Geschwindigkeit gegen den $\lg$ des Wandabstandes auf, so erhält man aus der Neigung der Kurve die n -Werte. Abb. 20 ist der Exponent n der Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Wandabstand für verschiedene Reynoldssche Zahlen aufgetragen. Man sieht, daß im Bereich kleinsten Reynoldsschen Zahlen der Exponent den Wert $n = 1/7$ annimmt, etwa $Re = 4 \cdot 10^3$ mit. Von etwa $Re = 10^4$ bis $100 \cdot 10^3$, wo die Blasius'sche Widerstandsformel

(10)

(10a)

bt

(11)

er der Rohr-
itte in einem
stehen, son-
chwindigkeits-
sein.

schwindigkeit
so folgt aus

(12)

gten Art um-
entsprechend
tzt

(13)

festen Wert
aus Gl. (13)

(14)

kann, ist bei
ach Gl. (11),
Widerstands-

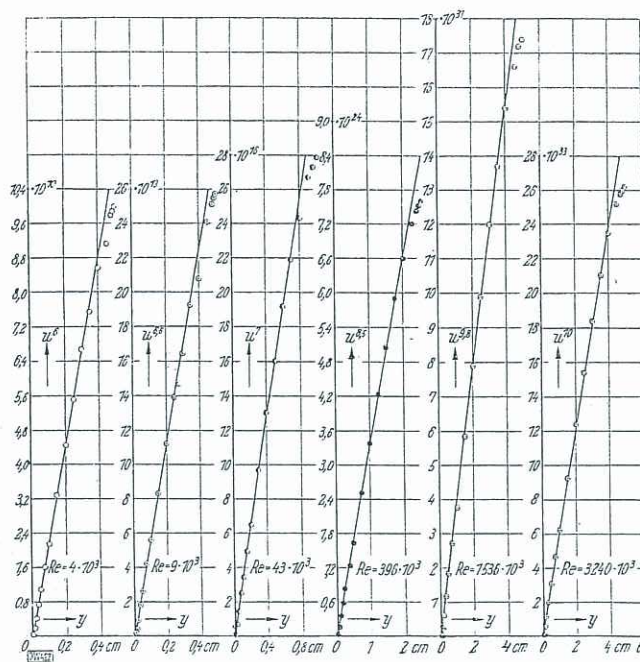


Abb. 20. $1/n$ -Potenz der Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Wandabstand

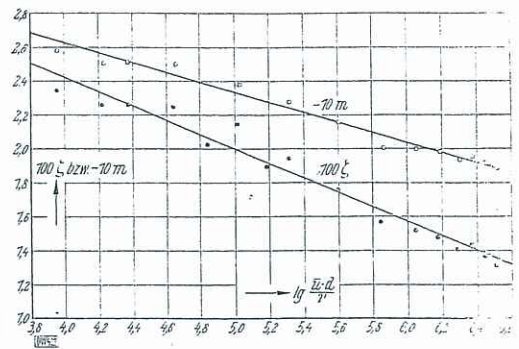


Abb. 21. 100ζ bzw. $10 m$ in Abhängigkeit von $\lg \left(\frac{u \cdot d}{r} \right)$

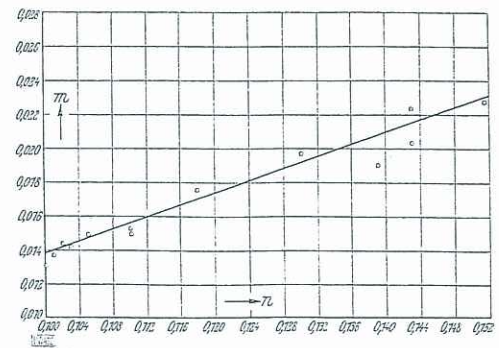


Abb. 22. m in Abhängigkeit von n

gekehrt pro-
hen Zahl ist,
 10^3 . Da bei
s Blasiusche
nn man nicht
h für höhere
Gültigkeits-
s ist die Nei-
Für höhere
kleiner und
bis auf fast
 $1/10$, so ergibt
Das bedeutet,
Reynoldsscher
ler Reynolds-
a den Expo-
nenten mit
dabei immer
esetz mit ver-
sungsformel zu
weist sich das
werden, nur
otenzgesetz in

hat man $1/n=7$, und bei der Reynoldsschen Zahl $Re=3240 \cdot 10^3$ steigt der Exponent auf $1/n=10$.

Wenn man von der Annahme ausgeht, daß zwischen Schubspannung an der Wand τ_0 , Abstand von der Wand y und Geschwindigkeit u eine eindeutige Beziehung besteht, so kann man, wie aus der Gl. (9) folgt, die Beziehung erhalten

$$\frac{\tau_0}{\rho u^2} = f \left(\frac{u \cdot y}{r} \right). \quad (16)$$

Die Größe $\frac{u \cdot y}{r}$ ist eine Art Reynoldssche Zahl, die der Wandentfernung y zugeordnet ist. Drückt man die Geschwindigkeitsverteilung in der Form des Prandtl'schen Potenzgesetzes aus, so erhält man die Beziehung

$$\frac{\tau_0}{\rho u^2} = \zeta \left(\frac{u \cdot y}{r} \right)^m, \quad (17)$$

wobei ζ eine dimensionslose Zahl ist, die aus der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung im Zusammenhang mit der zugehörigen Wandschubspannung ermittelt werden kann.

Dabei ist $m = \frac{2n}{1+n}$. Wenn man Gl. (17) logarithmiert, so erhält man

$$\lg \left(\frac{\tau_0}{\rho u^2} \right) = \lg \zeta + m \lg \left(\frac{u \cdot y}{r} \right). \quad (18)$$

Wenn man aus der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung die Größe $\lg \left(\frac{\tau_0}{\rho u^2} \right)$ ermittelt und in Abhängigkeit von $\lg \left(\frac{u \cdot y}{r} \right)$ aufträgt, so läßt sich die dimensionslose Konstante ζ aus der Ordinate an der Stelle $\lg \left(\frac{u \cdot y}{r} \right) = 0$ ablesen, sobald man die erhaltenen Punkte durch eine Gerade verbunden hat. Die Konstante m , die als Exponent des dimensionslosen Wandabstandes (Gl. (15)) auftritt,

und dem Exponenten $1/4$ im Blasius'schen Widerstandsgesetz entspricht, kann aus unseren Versuchen ermittelt werden. Durch Auflösung der Gl. (18) nach m erhält man

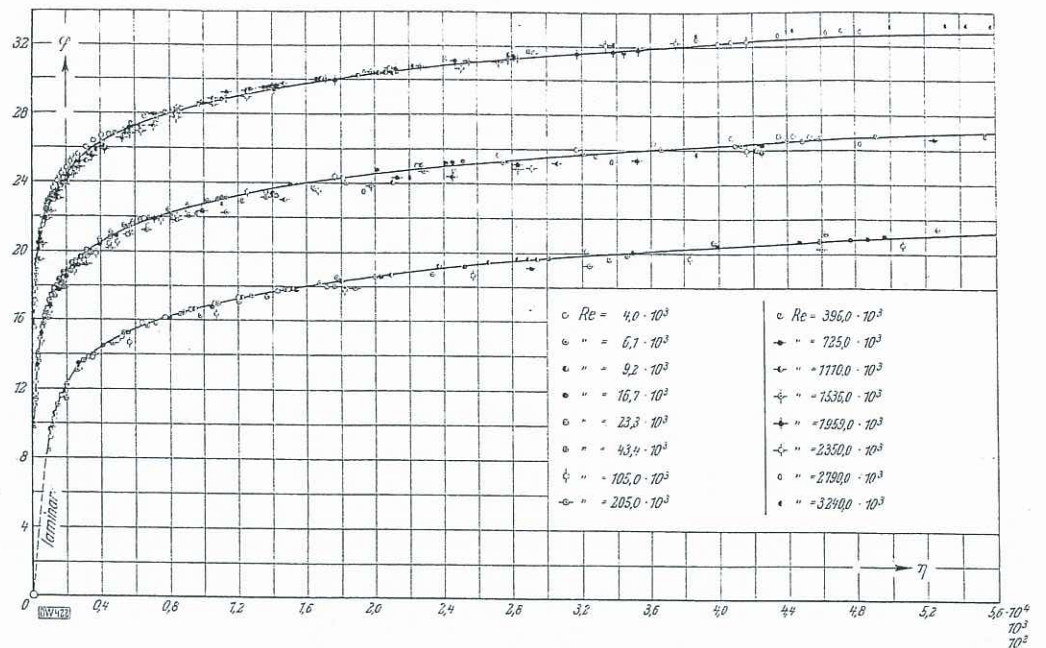
$$m = \frac{\lg \left(\frac{\tau_0}{\rho u^2} \right) - \lg \zeta}{\lg \left(\frac{u \cdot y}{r} \right)}. \quad (19)$$

Die aus den Versuchen ermittelten Konstanten ζ und der Exponent m sind in Abb. 21 in Abhängigkeit von $\lg \left(\frac{u \cdot d}{r} \right)$ aufgetragen. In Abb. 22 ist m in Abhängigkeit vom Exponenten n aufgetragen.

3. Universale Geschwindigkeitsverteilung

In einer neueren Fassung seiner Ideen legt Prandtl keinerlei Potenzformel mehr zugrunde, sondern geht nur davon aus, daß die Geschwindigkeit in Wandnähe nur von den physikalischen Größen, die in der Nähe der Wand gelten (τ_0 = Schubspannung an der Wand, μ = Zähigkeitskonstante und ρ = Dichte), abhängt, während sie unabhängig ist vom Abstand der gegenüberliegenden Wand und von der mittleren oder maximalen Geschwindigkeit. Nun bilden wir nach Prandtl¹⁹⁾ aus der Schubspannung an der Wand τ_0 und der Dichte ρ eine den Reibungszustand kennzeichnende Größe, die die Dimension der Geschwindigkeit hat $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$. Mit dieser Größe läßt sich

¹⁹⁾ L. Prandtl, Über den Reibungswiderstand, spannungslos. Luft. Versuch. u. Aerodyn. Versuchsanst. Göttingen, III. Heft, 1907, S. 1. — Zur turbulenten Strömung in Röhren und langs. Platten. Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanst. zu Göttingen, IV. Heft, 1922, S. 16.

Abb. 23. Universale Geschwindigkeitsverteilung ($v = v(y)$)

eine „dimensionslose Geschwindigkeit“ bilden, indem man die jeweilige Geschwindigkeit u durch v_* dividiert: $\varphi = \frac{u}{v_*}$. Gleichweise bilden wir aus dem Abstand von der Wand y , der Geschwindigkeit v_* und der kinematischen Zähigkeit $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ nach Art der Reynoldsschen Zahl einen „dimensionslosen Wandabstand“ $\eta = \frac{v_* y}{\nu}$. So erhalten wir in Wandnähe eine universale Geschwindigkeitsverteilung $\varphi = \varphi(\eta)^{20}$. Diese Abhängigkeit ist in Abb. 23

²⁰⁾ Über diese Beziehung hat der Verf. bereits im Sommer 1920 im Kolloquium für angewandte Mechanik in Göttingen vorgetragen.

dargestellt (Zahlentafel 3). In dieser Abbildung dimensionslose Geschwindigkeiten für eine Reihe noldsscher Zahlen nämlich von der kleinsten $4 \cdot 10^3$ zur größten $3240 \cdot 10^3$ dargestellt. Wegen des gr Abszissenbereiches $\eta = \frac{v_* y}{\nu}$ sind drei verschiedene l stäbe benutzt. Die eingezeichneten Punkte sind Maße nisse.

Die universale Geschwindigkeitsverteilung tritt besser zutage, wenn statt η die Größe $\lg \eta$ als Absziss nutzt wird, Abb. 24. Es fällt dabei auf, daß die Vers punkte innerhalb gewisser Streuungsgrenzen auf Geraden liegen. Bei näherer Betrachtung sieht man,

Zahlentafel 3

φ in Abhän;

$\varphi = \frac{u}{v_*}$ = dimensionslose Geschwindigkeit; u = jeweilige Geschwindigkeit; $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ = Schubspannungsgeschwindi; an der Wand; $\rho = D$

η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ
$Re = 4 \cdot 10^3$		$Re = 6.1 \cdot 10^3$		$Re = 9.2 \cdot 10^3$		$Re = 16.7 \cdot 10^3$		$Re = 23.3 \cdot 10^3$		$Re = 43.4 \cdot 10^3$		$Re = 105 \cdot 10^3$		$Re = 205$			
10	9,16	11	9,75	13	10,50	17	12,28	20	12,20	30	13,6	57	14,70	98	1		
13	10,41	15	11,08	19	11,85	27	13,45	33	13,86	52	15,1	107	16,42	188	1		
17	11,60	21	12,35	27	13,15	41	14,50	52	15,00	86	16,35	182	17,80	324	1		
21	12,30	27	13,08	36	13,92	56	15,20	72	15,79	120	17,10	257	18,70	460	2		
25	13,13	37	14,00	50	14,95	80	16,11	105	16,75	176	18,00	383	19,70	687	2		
35	13,80	47	14,65	65	15,60	105	16,79	137	17,40	233	18,70	507	20,50	913	2		
50	14,58	68	15,65	93	16,65	154	17,80	202	18,60	346	19,83	759	21,80	1367	2		
64	15,58	87	16,40	122	17,32	203	18,56	267	19,41	459	20,72	1007	22,75	1817	2		
78	16,15	108	17,00	151	17,90	252	19,18	332	20,10	572	21,32	1258	23,40	2267	2		
92	16,61	128	17,47	180	18,35	301	19,68	397	20,60	695	21,90	1511	24,05	2727	2		
106	17,00	148	17,88	208	18,70	349	20,09	462	21,10	798	22,30	1761	24,50	3177	2		
120	17,38	168	18,21	237	19,12	399	20,40	527	21,40	911	22,62	2007	24,80	3627	2		
134	17,62	188	18,49	266	19,45	447	20,70	592	21,70	1024	22,95	2267	25,15	4082	2		
148	17,77	201	18,56	288	19,60	477	20,82	631	21,80	1092	23,00	2412	25,30	4357	2		
162	17,79	205	18,60	289	19,63	487	20,85	648	21,81	1110	23,03	2467	25,33	4447	2		
176	17,80	209	18,70	294	19,65	497	21,00	657	21,83	1137	23,10	2511	25,36	4537	2		

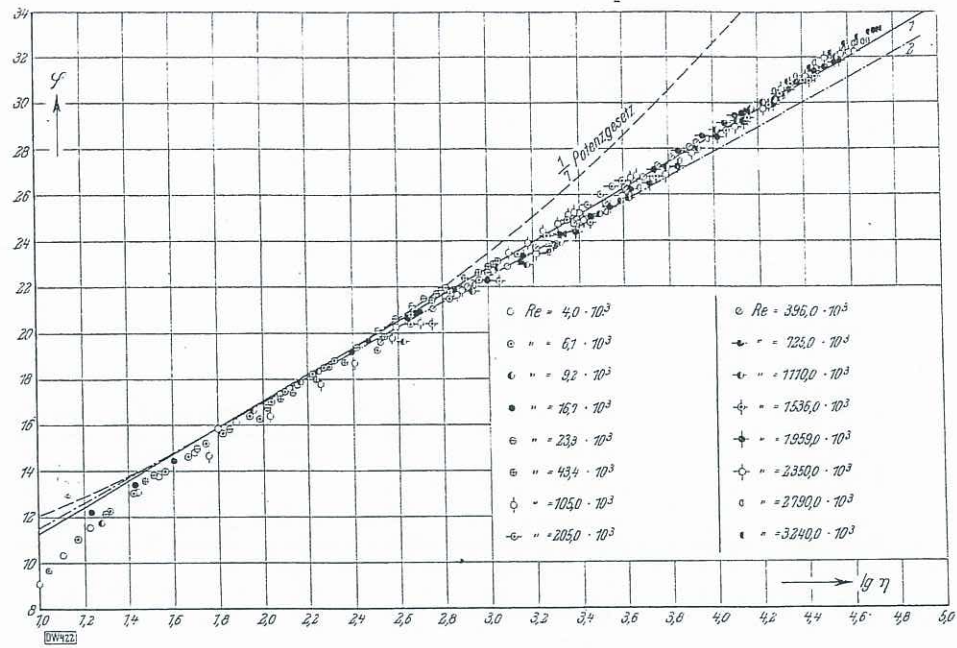
Abb. 24. φ in Abhängigkeit von $\lg \eta$

Abbildung sind
eine Reihe Rey-
noldsschen Zahlen
von $4 \cdot 10^3$ bis
zu einem großen
unterschiedlichen Maß-
stab sind Meßergeb-

nisse tritt noch
als Abszisse be-
achtet die Versuchs-
daten auf einer
Skala, die man, daß

die zu einer bestimmten Reynoldsschen Zahl gehörigen Versuchspunkte nicht genau auf einer Geraden liegen, sondern einen systematischen Gang von unten nach oben zeigen. Hierbei soll erwähnt werden, daß die Versuchspunkte bis zur Rohrmittte reichen, während nach der Prandtl'schen Hypothese nur die wandnahen Punkte auf einer durchlaufenden Kurve liegen sollen. Letzteres ist ziemlich gut erfüllt. Für $\lg \eta < 1,0$ ist dabei eine systematische Abweichung von der Geraden feststellbar.

Aus der Abb. 24 erhält man, wenn man die nahe der Rohrachse liegenden Punkte besonders berücksichtigt, auf graphischem Wege die Gerade (1) mit der Gleichung

$$\varphi = 5,5 + 5,75 \lg \eta. \quad (20)$$

Hiermit haben wir für eine Reihe von φ -Werten die zugehörigen η -Werte errechnet und in der Abb. 23 danach die durch die Versuchspunkte gehende Kurve gezeichnet.

Für die weiteren Näherungsrechnungen ist es jedoch zweckmäßig, die wandnahen Punkte zu bevorzugen. Die durch diese Punkte gelegte Gerade (2) wird durch die Gleichung

$$\varphi = 5,84 + 5,52 \lg \eta \quad (20a)$$

dargestellt.

Bei laminarer Strömung hat man, wenn die Geschwindigkeit u nur von y abhängt, für die Schubspannung den Ansatz

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_0$$

Abhängig-
keit von η
Geschwindigkeit;
nd; ρ = Dichte;

keit von η

$\eta = \frac{v_{st} \cdot y}{\nu}$ = dimensionsloser Wandabstand; y = Abstand von der Wand; ν = kinematische Zähigkeit; τ_0 = Schubspannung

Re = Reynoldssche Zahl.

η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ
$Re = 205 \cdot 10^3$		$Re = 396 \cdot 10^3$		$Re = 725 \cdot 10^3$		$Re = 1110 \cdot 10^3$		$Re = 1536 \cdot 10^3$		$Re = 1959 \cdot 10^3$		$Re = 2350 \cdot 10^3$		$Re = 2790 \cdot 10^3$		$Re = 3240 \cdot 10^3$	
98	16,31	171	17,98	299	19,08	427	17,91	580	20,20	700	21,72	830	21,92	967	22,40	1110	22,75
188	17,90	335	19,65	573	20,92	847	19,45	1140	22,10	1410	23,27	1670	23,50	1934	23,60	2220	24,40
324	19,25	581	20,80	997	22,32	1477	21,70	1980	23,70	2460	24,45	2920	24,90	3380	25,40	3880	25,80
460	20,21	827	21,70	1426	23,16	2107	24,00	2830	24,80	3520	25,35	4160	26,00	4835	26,38	5550	26,82
687	21,30	1237	22,70	2129	24,30	3160	25,20	4250	25,85	5270	26,45	6250	27,00	7250	27,70	8300	28,00
913	22,22	1647	23,45	2842	25,06	4210	26,00	5680	26,70	7040	27,22	8340	27,80	9670	28,50	11100	28,82
1367	23,40	2467	24,76	4257	26,23	6310	27,20	8500	27,95	10540	28,42	12510	29,00	14500	29,65	16650	30,00
1817	24,23	3287	25,60	5667	27,10	8410	28,05	11300	28,80	14080	29,28	16680	29,90	19340	30,50	22200	30,90
2267	24,96	4107	26,22	7087	27,92	10510	28,75	14150	29,50	17580	30,00	20850	30,60	24200	31,20	27740	31,60
2727	25,50	4927	26,82	8507	28,35	12600	29,35	17000	30,07	21120	30,60	25020	31,20	29000	31,74	33000	32,17
3177	26,00	5752	27,40	9907	28,53	14700	29,80	19800	30,50	24620	31,10	29190	31,60	33800	32,10	38800	32,58
3627	26,40	6567	27,70	11327	29,17	16800	30,20	20600	30,84	28160	31,40	33360	32,00	38680	32,40	44400	32,90
4082	26,61	7727	28,00	12757	29,46	18910	30,40	25500	31,10	31620	31,60	37530	32,20	43500	32,79	50000	33,10
4537	26,80	7877	28,05	13610	29,58	20210	30,53	27200	31,18	33750	31,79	40000	32,28	46420	32,80	53300	33,21
4447	26,85	8057	28,15	13910	29,59	20610	30,57	27800	31,20	34450	31,80	40800	32,30	47400	32,80	54400	33,24
4537	26,90	8217	28,20	14200	29,60	21000	30,60	28300	31,21	35200	31,82	41700	32,31	48400	32,80	55500	33,26

wo $\left(\frac{du}{dy}\right)_0$ den Wert von $\frac{du}{dy}$ in Wandnähe und μ die Zähigkeitskonstante bedeutet, oder

$$du = \frac{\tau_0}{\mu} dy.$$

Nach der Integration dieser Gleichung erhält man

$$u = \frac{\tau_0 y}{\mu}.$$

Setzt man $\tau_0 = \rho v_*'^2$ und $\mu = \rho \nu$, so läßt sich sofort schreiben

$$\frac{u}{v_*'} = \frac{v_*' y}{\nu}$$

oder

$$q = \eta.$$

Nach einer Abschätzung gilt diese Beziehung infolge des Einsetzens des turbulenten Vermischungsvorganges bis etwa $\eta = 10$. Dieses laminare Gebiet ist in der Abb. 21 bei der unteren Kurve gestrichelt gezeichnet. Wenn man

Gl. (13) durch $v_*' = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ dividiert und $\frac{u}{v_*'}$ durch q , $\frac{v_*' y}{\nu}$ durch η

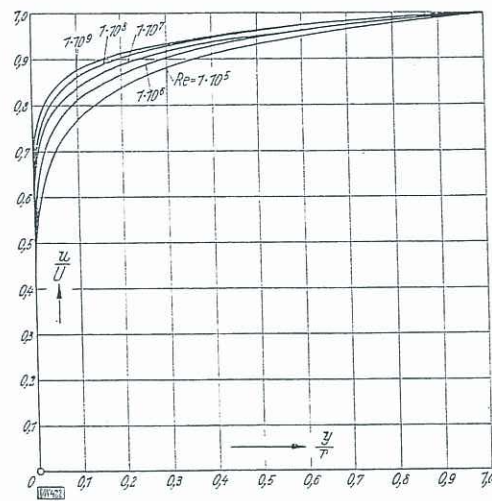


Abb. 25. Berechnete Geschwindigkeitsverteilungen für sehr große Reynoldssche Zahlen

ersetzt und den Zahlenfaktor errechnet, so erhält man

$$q = 8,74 \eta^{1/2} \quad (13a)$$

Die dieser Formel entsprechende Kurve ist in Abb. 24 gestrichelt eingezeichnet. Man sieht, daß die Gültigkeit auf den Bereich von $\lg \eta = 1,6$ bis 2,6 beschränkt ist.

Durch dieses Geradliniengesetz kann man für beliebige Reynoldssche Zahlen mit sehr guter Annäherung die Geschwindigkeitsverteilung berechnen, wenn man die physikalischen Größen τ_0 , $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ und den Rohrradius r vorschreibt. Aus der Gleichung der erhaltenen Geraden kann man für verschiedene Abstände von der Wand die zugehörigen q ausrechnen und durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit v_*' die jeweilige Geschwindigkeit u bestimmen, $u = q v_*'$. Aus dem dimensionslosen Abstand η kann man die zugehörigen Abstände von der Wand ermitteln, $y = \frac{\eta r}{v_*'}$. So erhalten wir die Geschwindigkeitsverteilung $u = f(y)$ für eine bestimmte Reynoldssche Zahl. In Abb. 25 sind 5 nach dieser Methode gewonnene Geschwindigkeitsverteilungen in dimensionsloser Darstellung eingezeichnet. Diese dimensionslosen Geschwindigkeitsverteilungen sind für die Reynoldsschen Zahlen Re von 10^5 bis 10^9 dargestellt und zeigen die Änderung

der Geschwindigkeitsverteilungsform mit der Reynoldsschen Zahl.

Es erscheint natürlich etwas gewagt, die Geschwindigkeit in der Rohrmitte aus einem Gesetz zu berechnen, das lediglich für die Geschwindigkeiten in der Wandnähe bestimmt ist; jedoch sind überhaupt die Geschwindigkeitsunterschiede in der mittleren Partie des Rohres an sich nicht mehr groß, andererseits ermutigt das in Abb. 2 dargestellte Ergebnis zu diesem Verfahren. Natürlich wird trotzdem der Wert in der Mitte selbst ungenau; die wirklichen Geschwindigkeitsverteilungen zeigen hier eine waagerechte Tangente, die hier benutzte Formel dagegen eine endliche, wenn auch kleine Neigung. Für das Durchflußvolumen macht diese Abweichung aber nur sehr wenig aus.

4. Mischungsweg und Austauschgrößen

Bei laminarer Strömung hat man, wenn die Geschwindigkeit u nur von y abhängt, für die Schubspannung den Ansatz

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (14)$$

wobei μ die Zähigkeitskonstante bedeutet. Ebenso kann man nach Boussinesq²³⁾ bei turbulenter Strömung die durch den turbulenten Impulsaustausch hervorgerufene „scheinbare“ Schubspannung den Ansatz

$$\tau' = A \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (15)$$

wobei $\bar{u}$ den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit u A eine Austauschgröße bedeutet, die das turbulente Äquivalent zur Zähigkeitskonstanten ist. Die Austauschgröße jedoch nicht konstant, sondern in der Flüssigkeit von Ort zu Ort verschieden. Das Wesentliche ist jetzt, die Austauschgröße A in Zusammenhang zu bringen mit der Geschwindigkeitsverteilung. Zu diesem Zwecke denkt man sich nach Reynolds die Geschwindigkeit zerlegt in einen zeitlichen Mittelwert und die Schwankungen um diesen. Man setzt also

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v',$$

wobei u' und v' die Schwankungen der x -Komponente bzw. der y -Komponente der Geschwindigkeit bedeuten. Geschwindigkeitsschwankungen rufen einen scheinbaren Spannungszustand hervor, der gegeben ist durch die Gleichungen

$$\sigma_x = -\rho \overline{u'^2}; \quad \tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}; \quad \sigma_y = -\rho \overline{v'^2}.$$

Es kommt jetzt darauf an, die Geschwindigkeitsschwankungen u' und v' durch die „Hauptströmung“ $\bar{u}$, $\bar{v}$ auszudrücken. Dies ist Prandtl durch folgende Überlegung gelungen. Wir nehmen, wie oben bei Gl. (21) und (22) der Einfachheit halber an, daß die Hauptströmung parallel zur x -Achse geht und daß quer zur Hauptströmungsrichtung ein Geschwindigkeitsgefälle herrscht. Für den Turbulenzzustand der Strömung ist eine Länge l charakteristisch, wo Prandtl als Mischungsweg bezeichnet. Die physikalische Bedeutung des Mischungsweges l ist die, daß in der turbulenten Strömung kleine Flüssigkeitsmassen eine Bewegung besitzen und sich infolgedessen um einen gewissen Betrag, eben den Mischungsweg l , quer zur Strömungsrichtung verschieben, bevor sie sich mit der Umgebung vermischen. Wenn jetzt eine kleine Flüssigkeitsmasse, die aus einem Ort mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$ stammt, sich quer zur Hauptströmung um eine Strecke l verschiebt, so unterscheidet sich ihre Geschwindigkeit von der mittleren Geschwindigkeit des neuen Ortes in erster Näherung um den Betrag $l \frac{d\bar{u}}{dy}$. Man kann als

²³⁾ H. Boussinesq, Leçon sur le calcul des courants, 1877, Paris. (Boussinesq, Leçon sur le calcul des courants, 1877, Paris.)

der Reynolds-

Geschwindig-
berechnen, das
Wandnähe be-
schwindigkeits-
lohes an sich
s in Abb. 24
n. Natürlich
ungenau; die
gen hier eine
rmal dagegen
ür das Durch-
über nur sehr

schgröße

die Geschwin-
spannung den

(21)

Ebenso macht
Strömung für
h hervorgeru-
atz

(22)

windigkeit und
bulente Analo-
austauschgröße ist
igkeit von Ort
etzt, die Aus-
n mit der Ge-
e denkt man
legt in einen
n um diesen.

x-Komponente
bedeuten. Die
1 scheinbaren
durch die Glei-

$$= \rho \bar{v}^2. \quad (23)$$

zitschwankun-
r auszudrück-
ung gelungen.
ler Einfachheit
l zur x-Achse
htung ein Ge-
rbulenzzustand
stisch, welche
physikalische
3 in der turbu-
um eine Eigen-
e einen ge-
quer zur Strö-
nit der neuen
e Flüssigkeits-
Geschwindig-
nung um die
hre Geschwin-
s neuen Ortes
n kann also für

arantes. Mémoires
ces de l'Institut

den absoluten Betrag der Schwankungen der x-Komponente der Geschwindigkeit setzen:

$$|u'| = l \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (24)$$

Die Schwankungen der y-Komponente der Geschwindigkeit v' kommen dadurch zustande, daß Flüssigkeitsmassen, die eine verschieden große Geschwindigkeit in der x-Richtung besitzen, zusammenprallen und infolgedessen seitlich ausweichen. Man kann deshalb v' proportional u' setzen, also

$$|v'| = l \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (25)$$

Damit hat man für die Schubspannung nach Gl. (23), wenn man die Proportionalitätskonstanten mit in das noch unbekannte l hineinnimmt, den Ausdruck

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \cdot \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (26)$$

Dadurch, daß der eine Faktor mit, der andere ohne Betragzeichen steht, ist dafür gesorgt, daß τ mit $\frac{d\bar{u}}{dy}$ das Vorzeichen wechselt. Durch Vergleich dieses Prandtl'schen Ansatzes für die Schubspannung mit Gl. (22) findet man für die Austauschgröße die Formel

$$A = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (27)$$

Dieser Prandtl'sche Ansatz, der eine tiefgehende physikalische Analyse der turbulenten Strömungen liefert, hat bereits in vielen Fällen²²⁾ zu einer recht guten Berechnung der turbulenten Strömungen geführt. Für die Strömungen in kreisförmigen Rohren lassen sich durch ihn befriedigende Gesetzmäßigkeiten finden.

Dividiert man Gl. (22) durch die Dichte, so erhält man

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{A}{\rho} \cdot \frac{du}{dy}.$$

Setzt man hier $\frac{A}{\rho} = \varepsilon$ ein, wo ε ein kinematisches Maß für den turbulenten Impulsaustausch darstellt, so ergibt sich

$$\frac{\tau}{\rho} = \varepsilon \cdot \frac{du}{dy}$$

oder

$$\varepsilon = \frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{dy}{du}. \quad (28)$$

Die kinematische Austauschgröße ε erhält man also durch Division der „kinematischen Schubspannung“ $\frac{\tau}{\rho}$ durch den

Differentialquotient der Geschwindigkeit $\frac{du}{dy}$. Die Größe dieses Differentialquotienten über den Rohrrahmometer wurde graphisch aus den gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen ermittelt. Da die Größen $\frac{du}{dy}$ und $\frac{\tau}{\rho} = \frac{r-y}{2\rho} \frac{dp}{dx}$,

22) L. Prandtl: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, Z. angew. Math. Mech., Bd. 5 (1925), S. 136. — Bericht über neuere Turbulenzforschungen. Hydraulische Probleme (Berlin, VDI-Verlag, 1926, S. 1).

W. Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Z. angew. Math. Mech. Bd. 6 (1926) S. 468.

L. Prandtl: Über ausgebildete Turbulenz. Verh. d. 2. intern. Kongr. f. techn. Mech., Zürich 1927.

J. Nikuradse: Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen, Forsch.-Arch. Ing.-Wes. Nr. 289 (1929).

J. Nikuradse: Über turbulente Wasserströmungen in geraden Rohren bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, herausgegeben von A. Güllert, L. Hopf und Th. v. Kármán, Aachen 1929, S. 68.

W. Frisch: Der Einfluß der Wandrauhigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen, Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928), S. 215.

L. M. Swan: On the turbulent wake behind a body of revolution. Proc. Roy. Soc., Lond., Bd. 125 (1929), S. 647.

A. Betz: Über turbulente Reibungsschichten an gekrümmten Wänden, Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, herausgegeben von A. Güllert, L. Hopf und Th. v. Kármán, Aachen 1929, S. 16.

J. Nikuradse: Widerstandsgesetz und Geschwindigkeitsverteilung von turbulenten Wasserströmungen in geraden und gekrümmten Rohren. Verh. d. 3. intern. Kongr. f. techn. Mech., Stockholm 1930, S. 201.

H. Schlichting: Über das ebene Windschattenproblem. Göttinger Dissertation, Ing.-Arch., Bd. 1 (1930), S. 332.

(Ableitung wie bei Gl. (9)) beide bei Annäherung an die Rohrachse gegen Null streben, wird die Ermittlung der Impulsaustauschgröße in diesem Gebiet ungenau. Deshalb wurden die Meßpunkte zur Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung in der Rohrachse dichter gelegt. Um durch die gemessenen Werte der Geschwindigkeiten eine Geschwindigkeitskurve so zu legen, daß diese einen glatten Verlauf

der $\frac{du}{dy}$ -Werte lieferte, sind in den gemessenen Punkten die Differentialquotienten gebildet und diese durch eine glatte Kurve verbunden worden. Nun wurde rückwärts aus dieser Kurve die Kurve der Geschwindigkeitsverteilung in kleineren Abständen von der Rohrmittel bestimmt. Durch dieses Verfahren war es möglich, die ε -Werte in der Nähe

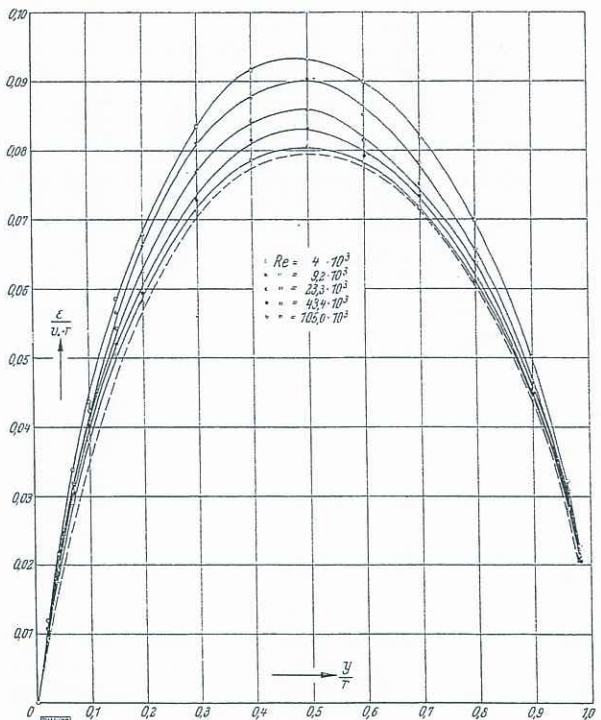


Abb. 26

$\frac{\varepsilon}{v_* r}$ in Abhängigkeit von y/r für kleine Reynoldssche Zahlen

der Rohrachse genauer berechnen zu können. So wurden die Werte im gemessenen Bereiche der Reynoldsschen Zahlen (von $4 \cdot 10^3$ bis $3240 \cdot 10^3$) für die früher erwähnten 16 Geschwindigkeitsprofile bestimmt und in Zahlentafel 4 wiedergegeben. Um die Verteilung der ε -Werte über den Rohrrahmometer für alle Bereiche der Reynoldsschen Zahlen vergleichbar zu machen, sind diese, da ε die Dimension von Geschwindigkeit $\times$ Länge hat, durch $v_* r$

dividiert worden, wobei $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ ist, also die Dimension einer

Geschwindigkeit hat. Die jeweiligen Abstände von der Wand sind auf den Rohrrahmometer bezogen. Die Abhängigkeit

$$\frac{\varepsilon}{v_* r} = f(y/r) \quad (29)$$

ist in Abb. 26 und 27 dargestellt. Betrachtet man diese Abhängigkeit in Abb. 26, so sieht man, daß die $\frac{\varepsilon}{v_* r}$ -Werte mit steigenden Reynoldsschen Zahlen abnehmen bis zu einem unveränderlichen Wert, der in dieser Abbildung

Zahlentafel 4

$$\frac{\varepsilon}{r_* \cdot r} \text{ in Abhängigkeit von } \frac{y}{r}$$

$q \cdot r$	$\frac{\tau}{\rho}$	$\frac{du}{dy}$	$\frac{\varepsilon}{r_* \cdot \tau}$	$\frac{\tau}{\rho}$	$\frac{du}{dy}$	$\frac{\varepsilon}{r_* \cdot \tau}$	$\frac{\tau}{\rho}$	$\frac{du}{dy}$	$\frac{\varepsilon}{r_* \cdot \tau}$	$\frac{\tau}{\rho}$	$\frac{du}{dy}$	$\frac{\varepsilon}{r_* \cdot \tau}$
	$Re = 4 \cdot 10^3; v_* = 3,82 \text{ cm/s}$ $r = 0,5 \text{ cm}$			$Re = 6,1 \cdot 10^3; v_* = 5,44 \text{ cm/s}$ $r = 0,5 \text{ cm}$			$Re = 9,2 \cdot 10^3; v_* = 7,76 \text{ cm/s}$ $r = 0,5 \text{ cm}$			$Re = 16,7 \cdot 10^3; v_* = 13,8 \text{ cm/s}$ $r = 0,5 \text{ cm}$		
0,02	14,30	631,0	0,0119	29,0	945,0	0,01195	59,0	1392	0,0108	178,7	2540	0,01025
0,04	14,00	340,0	0,0216	38,4	501,0	0,01042	57,8	738	0,0202	170,0	1322	0,01935
0,07	13,55	210,0	0,0338	27,5	318,0	0,0320	56,0	454	0,0318	164,6	782	0,03170
0,10	13,12	157,0	0,0437	26,0	231,0	0,0427	54,1	331	0,0422	159,2	583	0,0410
0,15	12,40	111,0	0,0585	25,2	163,0	0,0572	51,1	233	0,0565	150,4	405	0,0560
0,20	11,68	90,0	0,0680	23,6	129,0	0,0678	48,1	187	0,0662	141,5	330	0,0645
0,30	10,21	64,0	0,0835	20,7	93,0	0,0825	42,1	134	0,0812	124,0	232	0,0804
0,40	8,75	50,0	0,0916	17,75	73,0	0,0905	36,1	106	0,0878	106,2	184	0,0869
0,50	7,30	41,0	0,0933	14,80	59,0	0,0930	30,1	86	0,0904	85,5	152	0,0876
0,60	5,84	34,0	0,0900	11,82	50,0	0,0875	24,1	73	0,0852	70,8	129	0,0825
0,70	4,38	29,0	0,0820	8,88	41,0	0,0804	18,1	59	0,0788	53,1	104	0,0767
0,80	2,95	22,0	0,0700	5,92	32,0	0,0685	12,0	47,0	0,0659	35,4	83	0,0641
0,90	1,46	15,2	0,0502	2,96	22,0	0,0500	6,0	33	0,0469	17,7	58	0,0459
0,96	0,584	9,5	0,0322	1,183	13,8	0,0317	2,4	20	0,0310	7,08	35,5	0,0301
0,98	0,292	6,7	0,0228	0,592	9,8	0,0224	1,2	14	0,0221	3,54	25	0,0212
	$Re = 23,3 \cdot 10^3; v_* = 17,55 \text{ cm/s}$ $r = 0,5 \text{ cm}$			$Re = 43,4 \cdot 10^3; v_* = 18,44 \text{ cm/s}$ $r = 0,5 \text{ cm}$			$Re = 105 \cdot 10^3; v_* = 19,05 \text{ cm/s}$ $r = 1,5 \text{ cm}$			$Re = 205 \cdot 10^3; v_* = 17,4 \text{ cm/s}$ $r = 2,5 \text{ cm}$		
0,02	302,0	3410	0,0101	177,0	1348	0,0098	356	1338	0,0093	297,0	755	0,0091
0,04	296,0	1760	0,0192	173,5	693	0,0186	350	698	0,0175	291,0	390	0,0172
0,07	286,0	1040	0,0313	168,0	411	0,0304	338	407	0,0290	282,0	232	0,0280
0,10	277,0	778	0,0436	162,6	302	0,0401	328	302	0,0380	273,0	170	0,0369
0,15	262,0	550	0,0542	153,6	220	0,0520	310	215	0,0504	258,0	121	0,0490
0,20	246,0	448	0,0625	144,6	181	0,0594	290,5	175	0,0580	242,0	96	0,0580
0,30	215,0	318	0,0770	126,5	129	0,0730	255	125	0,0714	212,0	69	0,0707
0,40	185,0	250	0,0844	108,5	99	0,0816	218	97	0,0787	182,0	53	0,0790
0,50	154,0	204	0,0860	90,4	81	0,0832	182	79	0,0805	151,5	44	0,0791
0,60	123,0	172	0,0815	72,4	68	0,0795	145,6	65	0,0784	121,0	36,3	0,0768
0,70	92,5	140	0,0753	54,2	55	0,0735	109,2	53,3	0,0718	90,9	29,2	0,0715
0,80	61,5	110	0,0638	36,2	44	0,0612	72,8	41,6	0,0610	60,6	22,9	0,0610
0,90	30,8	77	0,0455	18,1	30	0,0450	36,4	28,8	0,0443	30,3	15,8	0,0441
0,96	12,3	47,8	0,0293	7,24	18,5	0,0292	14,5	17,9	0,0284	12,1	9,9	0,0280
0,98	6,15	33,5	0,0210	3,62	13,0	0,0208	7,3	12,6	0,0210	6,03	7,0	0,0199
	$Re = 396 \cdot 10^3; v_* = 30,4 \text{ cm/s}$ $r = 2,5 \text{ cm}$			$Re = 725 \cdot 10^3; v_* = 34,28 \text{ cm/s}$ $r = 5,0 \text{ cm}$			$Re = 1110 \cdot 10^3; v_* = 47,2 \text{ cm/s}$ $r = 5,0 \text{ cm}$			$Re = 1536 \cdot 10^3; v_* = 62,4 \text{ cm/s}$ $r = 5,0 \text{ cm}$		
0,02	906	1370	0,0087	1151	795	0,0085	2185	1117	0,0083	3830	1506	0,0082
0,04	887	704	0,0166	1129	410	0,0160	2140	576	0,0157	3750	770	0,0156
0,07	860	416	0,0272	1092	237	0,0269	2075	337	0,0261	3630	460	0,0254
0,10	832	304	0,0360	1058	174	0,0354	2007	243	0,0350	3510	333	0,0339
0,15	785	215	0,0480	998	124	0,0470	1898	173	0,0465	3320	230	0,0465
0,20	740	169	0,0577	940	97	0,0565	1785	134,5	0,0562	3122	179	0,0561
0,30	647	123	0,0692	823	68	0,0705	1560	94,0	0,0705	2730	127	0,0691
0,40	555	92,5	0,0790	705	53,5	0,0770	1340	72,3	0,0785	2340	97,5	0,0771
0,50	462	76	0,0802	587	43,7	0,0782	1115	59,2	0,0796	1950	80,0	0,0785
0,60	370	62	0,0785	470	35,7	0,0766	893	48,4	0,0781	1560	64,8	0,0775
0,70	277	51,7	0,0705	352	29,0	0,0710	670	39,2	0,0725	1170	53,1	0,0709
0,80	185	41,0	0,0595	235	23,0	0,0596	446	31,2	0,0606	780	41,9	0,0600
0,90	92,5	27,8	0,0438	117,5	16,0	0,0428	223	21,5	0,0439	390	28,8	0,0435
0,96	37,0	17,5	0,0278	47,0	9,9	0,0277	89,3	13,5	0,0280	156	18,0	0,0279
0,98	18,5	12,3	0,0189	23,5	7,0	0,0196	44,6	9,6	0,0197	78	12,8	0,0196
	$Re = 1959 \cdot 10^3; v_* = 77,5 \text{ cm/s}$ $r = 5,0 \text{ cm}$			$Re = 2350 \cdot 10^3; v_* = 68,3 \text{ cm/s}$ $r = 5,0 \text{ cm}$			$Re = 2790 \cdot 10^3; v_* = 74,5 \text{ cm/s}$ $r = 5,0 \text{ cm}$			$Re = 3240 \cdot 10^3; v_* = 83,1 \text{ cm/s}$ $r = 5,0 \text{ cm}$		
0,02	5900	1890	0,0081	4567	1670	0,0080	5460	1860	0,0079	6760	2080	0,0078
0,04	5770	977	0,0154	4474	872	0,0151	5345	968	0,0148	6620	1085	0,0147
0,07	5595	575	0,0251	4330	514	0,0248	5172	573	0,0242	6412	645	0,0243
0,10	5410	414	0,0338	4194	370	0,0332	5000	414	0,0324	6210	466	0,0321
0,15	5110	288	0,0459	3870	254	0,0447	4730	280	0,0454	5860	319	0,0442
0,20	4810	223	0,0558	3730	198,5	0,0551	4450	221	0,0540	5515	246	0,0540
0,30	4210	157	0,0692	3265	138	0,0693	3900	151	0,0692	4882	168	0,0697
0,40	3604	118	0,0790	2800	106	0,0775	3360	114,7	0,0787	4140	128	0,0775
0,50	3005	98	0,0792	2330	86,2	0,0791	2780	95,0	0,0786	3450	104	0,0797
0,60	2404	81	0,0767	1865	70,2	0,0780	2224	76,7	0,0780	2760	86,7	0,0765
0,70	1803	65,6	0,0710	1400	57,0	0,0721	1669	63,2	0,0708	2068	69,5	0,0714
0,80	1202	52,0	0,0596	922	45,5	0,0600	1112	50,5	0,0591	1380	55,7	0,0595
0,90	601	35,6	0,0435	466	31,7	0,0431	556	34,5	0,0435	690	38,8	0,0427
0,96	246	22,3	0,0278	186,4	19,5	0,0276	222	21,4	0,0278	276	23,7	0,0280
0,98	126	15,0	0,0195	93,2	13,9	0,0196	111	15,1	0,0197	128	16,8	0,0197

ϵ = turbulente Austauschgröße: $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ = Schubspannungsgeschwindigkeit; $r = \frac{d}{2}$ = Rohrradius; z = Abstand von der Wand; τ_0 = Schubspannung an der Wand; ρ = Dichte; $\frac{du}{dy}$ = Differentialquotient der Geschwindigkeit; Re = Reynoldssche Zahl; $\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit; ν = kinematische Zähigkeit.

$\frac{l}{y}$	$\frac{\epsilon}{v_* \cdot r}$
---------------	--------------------------------

$v_* = 13,3 \text{ cm/s}$
 $y = 5,0 \text{ cm}$

40	0,01025
122	0,01935
82	0,03170
189	0,0410
105	0,0560
130	0,0645
232	0,0804
84	0,0869
52	0,0876
29	0,0825
104	0,0767
83	0,0641
58	0,0459
35,5	0,0301
25	0,0212

$v_* = 17,4 \text{ cm/s}$
 $y = 2,5 \text{ cm}$

755	0,0091
390	0,0172
232	0,0280
170	0,0369
121	0,0490
96	0,0580
69	0,0707
53	0,0790
44	0,0791
36,8	0,0768
29,2	0,0715
22,9	0,0610
15,8	0,0441
9,9	0,0280
7,0	0,0199

$v_* = 62,4 \text{ cm/s}$
 $y = 5,0 \text{ cm}$

506	0,0082
770	0,0156
460	0,0254
333	0,0339
230	0,0465
179	0,0561
127	0,0691
97,5	0,0771
80,0	0,0785
64,8	0,0775
53,1	0,0709
41,9	0,0600
28,8	0,0435
18,0	0,0279
12,8	0,0196

$v_* = 83,1 \text{ cm/s}$
 $y = 5,0 \text{ cm}$

080	0,0078
085	0,0147
645	0,0243
466	0,0321
319	0,0442
246	0,0540
168	0,0697
128	0,0775
104	0,0797
86,7	0,0765
69,5	0,0714
55,7	0,0595
38,8	0,0427
23,7	0,0280
16,8	0,0197

= Abstand von der
Reynoldsschen Zahl:

durch eine gestrichelte Kurve angegeben ist. In Abb. 27 sind die $\frac{\epsilon}{v_* \cdot r}$ -Werte für Reynoldssche Zahlen $Re > 100 \cdot 10^3$ eingetragen. Sie liefern innerhalb einer gewissen Streuung eine Kurve, die unabhängig von der Reynoldsschen Zahl ist. Diese Kurve entspricht der gestrichelten Kurve in Abb. 26. Die strichpunktierte Kurve

der Abb. 27, welche die $\frac{\epsilon}{v_* \cdot r}$ -Werte in der Nähe der Rohrachse darstellt, ist durch Extrapolation gefunden. Charakteristisch für den Verlauf dieser Werte ist, daß die Austauschgröße an der Wand Null ist, da hier kein Austausch stattfinden kann; mit wachsendem Wandabstand steigt $\frac{\epsilon}{v_* \cdot r}$ zunächst linear, rasch an und erreicht ein Maximum bei $y = r/2$. Bei Annäherung an die Rohrachse fällt $\frac{\epsilon}{v_* \cdot r}$ dann auf einen sehr kleinen Wert wieder ab. Beim Anstieg in der Nähe der Wand beobachtet man eine stärkere Streuung der $\frac{\epsilon}{v_* \cdot r}$ -Werte als in der Nähe der Rohrachse. Das ist dadurch zu erklären, daß in der Nähe der Wand ein stärkerer Einfluß der Zähigkeit vorhanden ist.

Aus $\epsilon = \frac{A}{\rho} = l^2 \frac{d u}{d y}$ ergibt sich, daß der Mischungsweg

$$l = \sqrt{\epsilon \cdot \frac{d u}{d y}} \quad (30)$$

ist. Nach dieser Formel ist der Verlauf des Mischungsweges über den Rohrdurchmesser bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen berechnet und in der Zahlentafel 5 zusammengestellt worden. Die Abhängigkeit des Mischungsweges l vom Wandabstand y zeigt in dimensionsloser Darstellung $l/r = f(y/r)$ Abb. 28 und Abb. 29. Man sieht, daß der Mischungsweg in unmittelbarer Wandnähe (bis etwa $y/r = 0,07$) von Null an linear ansteigt. v. Kármán setzt diesen linearen Anstieg $l = \alpha y$, wobei α den Abstand von der Wand und α eine Proportionalitätskonstante bedeutet; diese hat von der Reynoldsschen Zahl $Re = 100 \cdot 10^3$ an aufwärts den Wert $\alpha = 0,38$ (Abb. 29), unterhalb $Re = 100 \cdot 10^3$ erhält man $\alpha = 0,40$ (Abb. 28). Oberhalb des Wertes $y/r = 0,07$ steigt der Mischungsweg schwächer

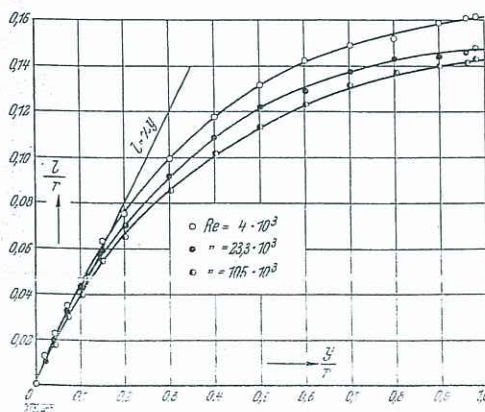
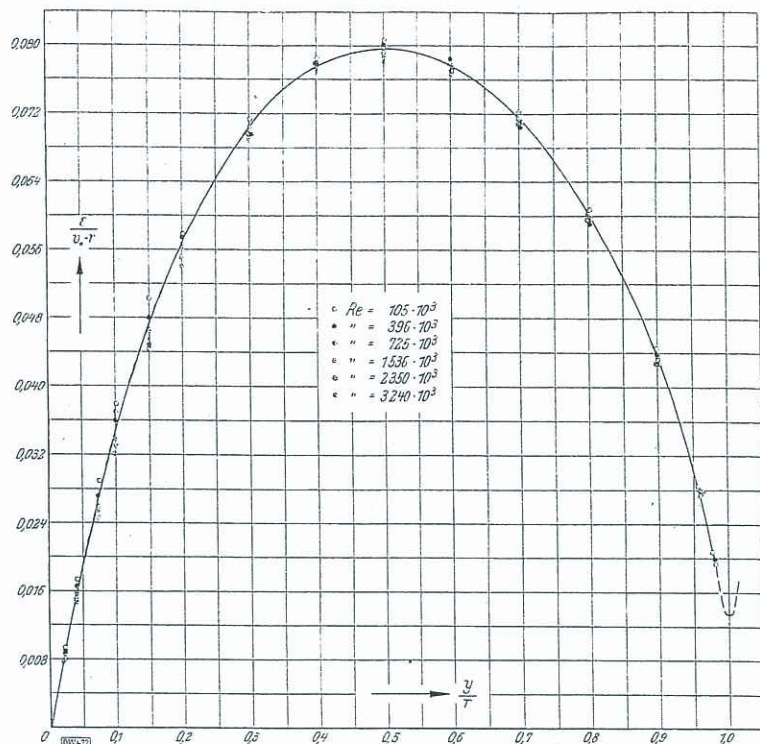


Abb. 28

l/r in Abhängigkeit von y/r für kleine Reynoldssche Zahlen

Abb. 27. $\frac{\epsilon}{v_* \cdot r}$ in Abhängigkeit von y/r für große Reynoldssche Zahlen

an und erreicht in der Rohrachse einen festen Wert etwa $l/r = 0,14$ (Abb. 29). In dieser Abbildung sind die Werte des dimensionslosen Mischungsweges für die fünf Reynoldsschen Zahlen $Re = 105 \cdot 10^3$ bis $3240 \cdot 10^3$ eingetragen; sie liefern innerhalb sehr geringer Streuung den gleichen Verlauf. Aus diesem Diagramm erkennt man, daß bei weitersteigenden Reynoldsschen Zahlen die Werte des dimensionslosen Mischungsweges l/r bei einem bestimmten dimensionslosen Wandabstand y/r nicht weiter abnehmen. Das kommt daher, daß bei den in Abb. 29 angegebenen Reynoldsschen Zahlen der Einfluß der Zähigkeit nicht mehr vorhanden ist. Unterhalb $Re = 100 \cdot 10^3$ beobachtet man infolge des Zähigkeitseinflusses die Änderung des dimensionslosen Mischungsweges l/r mit der Reynoldsschen Zahl, und zwar steigt l/r mit abnehmender Reynoldsscher Zahl. Daher erhält man für verschiedene Reynoldssche Zah-

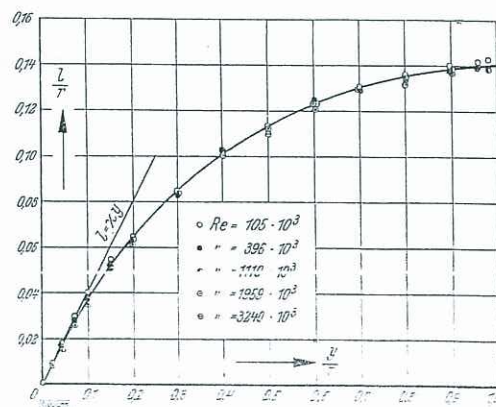


Abb. 29

l/r in Abhängigkeit von y/r für große Reynoldssche Zahlen

len in Abb. 28 verschiedene l/r -Kurven. Die Abhängigkeit l/r als Funktion von y/r , wie sie in Abb. 29 dargestellt ist, kann durch folgende Interpolationsformel von Prandtl wiedergegeben werden:

$$l/r = 0,14 - 0,08(1 - y/r)^2 - 0,06(1 - y/r)^3, \quad (31a)$$

aus welcher sich

$$z = \left[\frac{dl}{dy} \right]_{y=0} = 0,40$$

ergibt.

Unter Mithinberücksichtigung der Zähigkeit ergibt sich ein dimensionsrichtiger Ansatz für die Abhängigkeit des Mischungsweges vom Wandabstand durch die folgende Überlegung. Die Strömungsverhältnisse in Wandnähe sind bekanntlich durch die physikalischen Größen τ_0 , ρ , μ und y allein bestimmt. Aus diesen Größen läßt sich die bereits erwähnte dimensionslose Größe $\frac{y}{\mu} \sqrt{\tau_0} = \frac{v_* y}{\nu}$ bilden. Für den Mischungsweg ergibt sich so der Ansatz²³⁾:

$$l = y f\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) = y f(\eta). \quad (32)$$

Man kann $\eta = \frac{v_* y}{\nu}$ als eine (allerdings variable) Reynoldssche Zahl in Wandnähe auffassen. Die Funktion f ist

²³⁾ L. Prandtl: Turbulenz und ihre Entstehung. Tokio-vortrag 1929. Rep. aer. Res. Inst., Tokyo, No. 65, 1930.

empirisch zu ermitteln. Da

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = l \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (33)$$

ist

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{v_*}{l} = \frac{v_*}{y \cdot f(\eta)} \quad (34)$$

oder nach Integration

$$\bar{u} = \int_{y_0}^y \frac{v_* dy}{y \cdot f(\eta)}, \quad (35)$$

Diese Formel verknüpft offenbar die Geschwindigkeitsverteilung mit dem Widerstandsgesetz. Die untere Grenz des Integrals, die hier mit y_0 bezeichnet ist, ist, eine genügend genaue Formulierung von $f(\eta)$ in Wandnähe vorausgesetzt, in einem glatten Rohr gleich Null zu setzen und in einem rauhen Rohr gleich einer für die Rauigkeit charakteristischen Länge. Die Bestimmung der f -Funktion erfolgt aus der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung; indem man zuerst l berechnet und dann $l/y = f(\eta)$ aus trägt. Diese Beziehung findet sich in Abb. 30 (Zahlen-tafel 6) in logarithmischem Maßstab. Jede von oben nach unten verlaufende Kurve entspricht einer bestimmten Reynoldsschen Zahl, die als Parameter angeschrieben ist. Die obersten Punkte der Kurve liegen in unmittelbarer Nähe der Wand. Die von links nach rechts verlaufenden Kurven verbinden Punkte gleicher y/r -Werte. Weiter zeigt das Diagramm, daß zu einer bestimmten y/r -Kurve oben

Zahlentafel 5

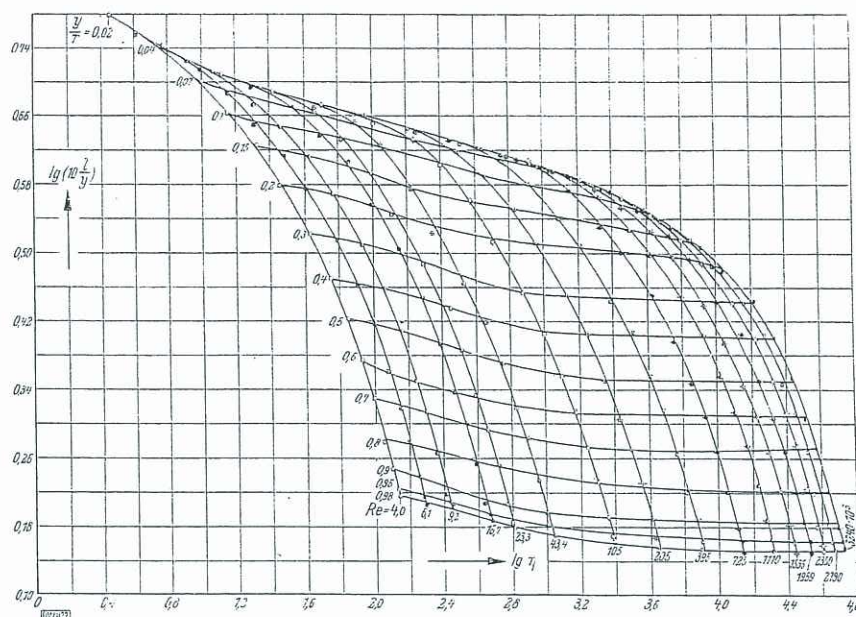
$\frac{l}{r}$ in Abhängigkeit von $\frac{y}{r}$

l = Mischungsweg; r = Rohrradius; y = Abstand von der Wand; Re = Reynoldssche Zahl;
 $\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit; ν = kinematische Zähigkeit.

y/r	$Re=4,0 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm	$Re=6,1 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm	$Re=9,2 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm	$Re=16,7 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm	$Re=23,3 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm	$Re=43,4 \cdot 10^3$ $r=1,0$ cm	$Re=105 \cdot 10^3$ $r=1,5$ cm	$Re=205 \cdot 10^3$ $r=2,5$ cm
0,02	0,0120	0,0114	0,0110	0,0104	0,0102	0,0099	0,0094	0,0092
0,04	0,0220	0,0212	0,0206	0,0197	0,0195	0,0190	0,0179	0,0175
0,07	0,0351	0,0340	0,0330	0,0328	0,0325	0,0315	0,0300	0,0290
0,10	0,0460	0,0446	0,0444	0,0432	0,0428	0,0423	0,0400	0,0389
0,15	0,0634	0,0616	0,0614	0,0606	0,0588	0,0564	0,0546	0,0532
0,20	0,0758	0,0752	0,0742	0,0720	0,0700	0,0665	0,0652	0,0649
0,30	0,0996	0,0978	0,0968	0,0960	0,0922	0,0872	0,0850	0,0845
0,40	0,1180	0,1156	0,1132	0,1120	0,1088	0,1049	0,1015	0,1016
0,50	0,1320	0,1304	0,1276	0,1218	0,1216	0,1173	0,1136	0,1120
0,60	0,1422	0,1372	0,1344	0,1304	0,1288	0,1250	0,1236	0,1210
0,70	0,1492	0,1454	0,1440	0,1400	0,1374	0,1346	0,1310	0,1305
0,80	0,1520	0,1520	0,1472	0,1432	0,1428	0,1383	0,1367	0,1360
0,90	0,1590	0,1564	0,1486	0,1450	0,1440	0,1417	0,1398	0,1395
0,96	0,1608	0,1574	0,1548	0,1500	0,1466	0,1454	0,1418	0,1411
0,98	0,1614	0,1572	0,1564	0,1540	0,1480	0,1464	0,1430	0,1400
	$Re=396 \cdot 10^3$ $r=2,5$ cm	$Re=725 \cdot 10^3$ $r=2,5$ cm	$Re=1110 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm	$Re=1536 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm	$Re=1959 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm	$Re=2350 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm	$Re=2790 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm	$Re=3240 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm
0,02	0,0088	0,0086	0,0081	0,0082	0,0081	0,0081	0,0080	0,0079
0,04	0,0169	0,0164	0,0161	0,0158	0,0156	0,0154	0,0151	0,0150
0,07	0,0282	0,0279	0,0270	0,0262	0,0260	0,0256	0,0251	0,0248
0,10	0,0370	0,0374	0,0368	0,0356	0,0355	0,0350	0,0342	0,0338
0,15	0,0520	0,0509	0,0505	0,0500	0,0496	0,0490	0,0492	0,0481
0,20	0,0645	0,0631	0,0628	0,0624	0,0622	0,0615	0,0607	0,0604
0,30	0,0830	0,0845	0,0840	0,0820	0,0827	0,0829	0,0826	0,0833
0,40	0,1020	0,0994	0,1011	0,0996	0,1017	0,1000	0,1010	0,1000
0,50	0,1130	0,1110	0,1130	0,1101	0,1120	0,1120	0,1110	0,1130
0,60	0,1240	0,1218	0,1238	0,1220	0,1211	0,1230	0,1230	0,1211
0,70	0,1290	0,1294	0,1319	0,1290	0,1294	0,1312	0,1291	0,1310
0,80	0,1329	0,1330	0,1353	0,1337	0,1330	0,1340	0,1320	0,1332
0,90	0,1382	0,1359	0,1389	0,1340	0,1377	0,1396	0,1368	0,1359
0,96	0,1390	0,1386	0,1400	0,1386	0,1392	0,1386	0,1390	0,1400
0,98	0,1400	0,1381	0,1396	0,1380	0,1380	0,1390	0,1390	0,1400

(35)

Abb. 30
 $\lg (10 l/y)$ in Abhängigkeit
 von $\lg \eta$



l/y in Abhängigkeit von y/r und $\lg (100\ l/y)$ in Abhängigkeit von $\lg \eta$.

l = Mischungsweg; y = Abstand von der Wand; $\eta = \frac{v_* y}{\nu}$ = dimensionsloser Wandabstand; $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ = Schubspannungsgeschwindigkeit; ν = kinematische Zähigkeit; r = Rohrradius; Re = Reynoldssche Zahl; $\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit.

l/r		η		η		η		η		η		η		η		η	
$Re=205 \cdot 10^3$ $r=2,5$ cm		$Re=4 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm		$Re=6,1 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm		$Re=9,2 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm		$Re=16,6 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm		$Re=23,8 \cdot 10^3$ $r=0,5$ cm		$Re=43,4 \cdot 10^3$ $r=1,0$ cm		$Re=105 \cdot 10^3$ $r=1,5$ cm		$Re=205 \cdot 10^3$ $r=2,5$ cm	
0,0092	2,83	0,600	4,03	0,569	5,75	0,552	9,8	0,518	13	0,510	22,6	0,495	50	0,470	90,5	0,457	
0,0175	5,66	0,550	8,10	0,531	11,5	0,515	19,6	0,493	26	0,488	45,2	0,475	100	0,447	181	0,437	
0,0290	9,90	0,501	14,1	0,485	20,1	0,470	34,2	0,468	46	0,464	79,1	0,450	175	0,430	317	0,415	
0,0389	14,14	0,460	20,2	0,446	28,7	0,443	49,0	0,433	65	0,429	113,0	0,423	240	0,400	453	0,389	
0,0532	21,20	0,422	30,2	0,410	43,1	0,409	73,4	0,404	98	0,392	169,4	0,376	376	0,364	680	0,355	
0,0649	28,30	0,379	40,3	0,376	57,5	0,371	98,0	0,360	130	0,350	226,0	0,333	500	0,326	906	0,324	
0,0845	42,50	0,333	60,5	0,326	86,3	0,323	147	0,320	195	0,307	339	0,291	752	0,284	1360	0,2822	
0,1016	56,60	0,295	80,5	0,289	115,0	0,288	196	0,280	260	0,272	452	0,262	1000	0,254	1810	0,254	
0,1120	70,70	0,264	101,0	0,261	143,8	0,256	245	0,248	325	0,243	565	0,2346	1251	0,227	2260	0,224	
0,1210	85,00	0,237	121,0	0,229	172,5	0,224	294	0,217	390	0,215	678	0,2083	1504	0,206	2720	0,202	
0,1305	99,00	0,213	141,0	0,208	201,0	0,206	342	0,200	455	0,1965	791	0,1920	1754	0,187	3170	0,186	
0,1360	113,00	0,190	161,0	0,190	230,0	0,184	392	0,179	520	0,1785	904	0,1716	2000	0,171	3620	0,170	
0,1395	127,30	0,1765	181,2	0,1735	258,5	0,165	440	0,161	585	0,160	1017	0,1574	2260	0,1555	4075	0,155	
0,1411	136,0	0,1675	193,5	0,164	276,0	0,1615	470	0,1563	624	0,153	1085	0,1515	2405	0,1478	4350	0,147	
0,1400	138,8	0,1645	197,5	0,1603	282,0	0,1595	480	0,1535	636	0,1512	1109	0,1480	2460	0,146	4440	0,143	

l/r		η		η		η		η		η		η		η		η	
$Re=3240 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm		$Re=396 \cdot 10^3$ $r=2,5$ cm		$Re=725 \cdot 10^3$ $r=2,5$ cm		$Re=1110 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm		$Re=1536 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm		$Re=1959 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm		$Re=2350 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm		$Re=2790 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm		$Re=3240 \cdot 10^3$ $r=5,0$ cm	
0,0079	0,164	0,439	0,284	0,427	0,42	0,418	0,566	0,411	0,704	0,406	0,834	0,404	0,967	0,398	1,11	0,395	
0,0150	0,328	0,423	0,566	0,410	0,84	0,401	1,13	0,394	1,41	0,389	1,668	0,384	1,934	0,378	2,22	0,375	
0,0248	0,574	0,404	0,990	0,399	1,47	0,386	1,98	0,375	2,46	0,372	2,92	0,366	3,380	0,358	3,88	0,355	
0,0338	0,820	0,380	1,419	0,375	2,10	0,367	2,83	0,356	3,52	0,355	4,16	0,350	4,835	0,332	5,55	0,338	
0,0481	1,280	0,347	2,122	0,339	3,15	0,336	4,25	0,334	5,27	0,331	6,25	0,327	7,25	0,328	8,33	0,321	
0,0604	1,64	0,322	2,835	0,316	4,20	0,314	5,66	0,312	7,04	0,311	8,34	0,308	9,67	0,304	11,10	0,302	
0,0833	2,46	0,277	4,250	0,282	6,30	0,281	8,50	0,274	10,54	0,276	12,51	0,276	14,50	0,276	16,65	0,278	
0,1000	3,28	0,255	5,66	0,249	8,40	0,243	11,30	0,248	14,08	0,244	16,68	0,250	19,34	0,253	22,20	0,250	
0,1130	4,10	0,227	7,08	0,222	10,50	0,226	14,15	0,221	17,58	0,224	20,85	0,224	24,20	0,222	27,74	0,226	
0,1211	4,92	0,207	8,50	0,203	12,60	0,206	17,00	0,203	21,12	0,202	25,02	0,205	29,00	0,205	33,30	0,202	
0,1310	5,745	0,184	9,90	0,185	14,70	0,188	19,80	0,184	24,62	0,185	29,19	0,188	33,80	0,185	38,80	0,187	
0,1332	6,56	0,166	11,32	0,166	16,80	0,169	22,60	0,167	25,16	0,166	32,36	0,168	38,68	0,167	44,40	0,167	
0,1359	7,72	0,154	12,75	0,151	18,90	0,154	25,50	0,152	31,62	0,153	37,53	0,151	43,50	0,152	50,00	0,151	
0,1400	7,87	0,145	13,60	0,145	20,20	0,146	27,20	0,145	33,77	0,145	40,00	0,144	46,22	0,145	53,80	0,148	
0,1400	8,05	0,143	13,90	0,141	20,60	0,142	27,80	0,141	34,45	0,141	40,98	0,142	47,40	0,1422	54,40	0,143	

5. Ähnlichkeitsbetrachtung

In neuerer Zeit gelang es v. Kármán²⁴⁾, von einem anderen Gesichtspunkt aus den Prandtl'schen Mischungswegansatz zu begründen.

Über den Charakter der Abhängigkeit der turbulenten Spannungen vom Strömungsfeld kann man heutzutage noch zwei grundsätzlich verschiedene Annahmen machen. Man kann annehmen, daß die turbulenten Spannungen sich nur aus dem ganzen Strömungsfeld mit seinen Randbedingungen durch ein „Integralgesetz“ erklären lassen, oder aber, daß die turbulenten Spannungen in einem herausgegriffenen Punkte schon durch das Verhalten der nächsten Umgebung stets in derselben Weise, also durch ein Differentialgesetz bestimmt sind. Für die durch die Molekularbewegung erzeugten Spannungen, also für laminare Reibung gilt bekanntlich ein Differentialgesetz; die laminaren Spannungen lassen sich durch das an dem betreffenden Orte herrschende Geschwindigkeitsgefälle und die Konstante der inneren Reibung ausdrücken:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (36)$$

v. Kármán prüft die Annahme eines Differentialgesetzes für die turbulenten Spannungen. Damit ein solches bestehen kann, müssen offenbar die Nebenbewegungen, soweit sie in sich zusammenhängen, keine große räumliche Ausdehnung haben, und ferner müssen sie in den einzelnen Punkten des Strömungsfeldes ähnlich verlaufen. Da die Betrachtung nur für große Reynoldssche Zahlen gilt, kann man im allgemeinen auch den Einfluß der Zähigkeit vernachlässigen.

Die mathematische Formulierung ist nun einfach. v. Kármán macht nun noch die für die folgende Ableitung nicht unbedingt erforderliche Voraussetzung, daß die Nebenbewegung in einem Koordinatensystem, das an der Hauptbewegung des zu betrachtenden Punktes teilnimmt, stationär sei. Die ganze Bewegung sei zweidimensional, die Hauptbewegung U in der x -Richtung sei nur von der Querkoordinate y abhängig. Den Anfangspunkt des oben eingeführten Koordinatensystems lassen wir mit dem ins Auge gefaßten Punkte zusammenfallen, so daß die Hauptgeschwindigkeit in der Umgebung des betrachteten Punktes

$$U = U_0' y + \frac{U_0''}{2} y^2 + \dots \quad (37)$$

wird. Die gesamte Stromfunktion Ψ wird mit ψ als Stromfunktion der Nebenbewegung

$$\Psi(x, y) = \frac{U_0'}{2} y^2 + \frac{U_0''}{6} y^3 + \dots + \psi(x, y). \quad (38)$$

Da ψ sich nun beim Übergang zu einem anderen Punkt ähnlich verändern soll, wird es sich hierbei nur um einen Faktor A , der ein Maß für die Intensität der Schwingungsbewegung ist, und einen Längenmaßstab l für die räumlichen Abmessungen des Strömungsfeldes ändern, d. h. also, wenn wir

$$x = l\xi, \quad y = l\eta, \quad \psi = A f(\xi, \eta) \quad (39)$$

setzen, soll $f(\xi, \eta)$ unabhängig von der Wahl der untersuchten Stelle sein.

Wenn man aus den Eulerschen Differentialgleichungen für eine ebene, stationäre, reibungslose Strömung

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

den Druck p eliminiert, indem man die erste Gleichung nach y und die zweite nach x differenziert und dann durch

$$u = U + u' = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v = v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

wo u' und v' die Geschwindigkeitskomponenten der Neben-

bewegung bedeuten, die Stromfunktion einführt, so erhält man

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0, \quad (40)$$

wo Δ den Laplaceschen Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

bedeutet.

Nach Einführung der obigen Ansätze (38) erhält man in der nächsten Umgebung des betrachteten Punktes

$$\left(U_0' y + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} U_0' - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0, \quad (41)$$

und in den dimensionslosen Größen f , ξ und η

$$U_0' l \eta \frac{A}{l^2} \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{A}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi} U_0' + \frac{A^2}{l^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Delta f}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (42)$$

wo die Differentiation von f jetzt auf die neuen Variablen ξ und η bezogen ist. Der Strich bei U bedeutet jedoch Differentiation nach y . Damit sich f unabhängig von der betrachteten Stelle, also von A , l , U_0' und U_0'' ergibt, müssen die Koeffizienten dieser Differentialgleichung für f konstant sein. Nach Division der Gleichung (42) durch $\frac{A^2}{l^2}$ erhält man

$$\frac{U_0'}{A} l^2 \eta \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - U_0'' \frac{l^2}{A} + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Delta f}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (43)$$

Es muß also sein

$$U_0' \frac{l^2}{A} = \text{const}, \quad U_0'' \frac{l^2}{A} = \text{const}$$

oder

$$U_0' \sim \frac{A}{l^2}, \quad U_0'' \sim \frac{A}{l^3} \quad (\sim \text{bedeutet proportional})$$

oder

$$l \sim \frac{U_0'}{U_0''}, \quad A \sim \frac{U_0'^3}{U_0''^2} \sim l^2 U_0'. \quad (44)$$

Für dieses Resultat läßt sich nach Betz²⁵⁾ auch die folgende sehr anschauliche Ableitung geben:

Die Geschwindigkeitsschwankungen der u -Komponente einer bestimmten Schicht der Hauptströmung mit der mittleren Geschwindigkeit U_0 kommen dadurch zustande, daß infolge der turbulenten Querbewegung Teilchen aus benachbarten Schichten mit größerer bzw. kleinerer Geschwindigkeit in die Schicht U_0 eindringen und dabei ihre ursprüngliche Geschwindigkeit beibehalten. Stammen diese Teilchen aus Gebieten, die um die Strecke l_1 von der betrachteten Schicht entfernt sind, so ist ihre Geschwindigkeit $U_0 + l_1 U_0'$, die Schwankung der u -Komponente in der Schicht U_0 also gleich

$$u' = \pm l_1 U_0'. \quad (45)$$

Diese Überlegung kann man noch weiter ausdehnen. Außer ihrer Geschwindigkeit $U_0 + l_1 U_0'$ führen die Teilchen bei der Querbewegung auch ihre mittlere Drehung

$$\zeta = \text{rot } U = U''$$

mit sich; $\zeta_0 = \text{rot } U_0 = U_0''$ ist die mittlere Drehung in der betrachteten Schicht U_0 , und $\zeta = \zeta_0 \pm l_1 \zeta_0' = \zeta_0 \pm l_1 U_0''$ diejenige in den um $\pm l_1$ entfernten Schichten. Die Drehung der durch die Querbewegung in die Schicht U_0 gelangten Teilchen weicht also von der hier vorhandenen mittleren Drehung um den Betrag

$$\zeta - \zeta_0 = l_1 U_0''$$

ab. Diese Teilchen bilden also ein System von rechts- und linksdrehenden Wirbeln, und die turbulenten Störungsgeschwindigkeiten kann man jetzt als Feld dieser Wirbel auffassen. Ist l_2 der mittlere Abstand der rechts- und linksdrehenden Teilchen, so ist ihr Durchmesser $\sim l_2$. Für die Strömungsgeschwindigkeit $v = v'$ zwischen zwei Wi-

²⁴⁾ Vgl. Fußnote 12, S. 2.

²⁵⁾ A. Betz, Die physikalische Ähnlichkeitsüberlegung für turbulente Vorgänge in physikalischer Auffassung, Z. angew. Math. Mech. Bd. 11 (1931), S. 327.

führt, so erhält

$$(40)$$

erhält man in
Punktes

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad (41)$$

1 η

2 η

3 η

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad (42)$$

neuen Variablen
bedeutet jedoch
abhängig von der
ad U_0'' ergibt
Gleichung für f
ang (42) durch

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial \eta} = 0. \quad (43)$$

onst

proportional)

$$U_0'. \quad (44)$$

5) auch die fol-

u -Komponente
ng mit der mitt-
zustande, daß
eilen aus be-
kleinerer Ge-
1 und dabei ihre
Stammen diese
2 l von der be-
re Geschwindig-
Komponente in

(45)

asdehnen. Außer
die Teilchen bei
ung

lere Drehung in
 $\xi = \xi_0 \pm l_1 \xi_0'$
tfernten Schieb-
wertung in die
von der hier vor-
g

von rechts- und
enten Störungs-
d dieser Wirbel
der rechts- und
esser $\sim l_2$. Für
schen zwei Wir-

erlegung für turbu-
ngen. *Stat. Mech.*

bein erhält man dann

$$v' \sim l_2 (\xi - \xi_0) \sim l_2 l_1 U_0'''. \quad (46)$$

Wegen der vorausgesetzten Ähnlichkeit der turbulenten Schwankungsbewegung muß $u' \sim r'$ und $l_1 \sim l_2$ sein, so daß man statt l_1 und l_2 einen gemeinsamen Längemaßstab l einführen kann. Damit hat man aus (45) und (46)

$$l U_0' \sim l^2 U_0'''$$

oder

$$l \sim \frac{U_0'}{U_0''}. \quad (47)$$

in Übereinstimmung mit dem v. Kármánschen Ergebnis.

Früher hatten wir für die turbulente Schubspannung τ den Ansatz

$$\tau = -\rho \bar{u}' v',$$

wobei u' und v' die Komponenten der Geschwindigkeitschwankungen bedeuten. Es ist also

$$\tau = \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho \frac{A^2}{l^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

oder

$$\tau = \rho l^2 U_0'^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}; \quad (48)$$

da f unabhängig von x und y ist, hat man den Prandtl'schen Ansatz für den Mischungsweg

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2 \quad (49)$$

bestätigt. Darüber hinaus erhält man für l eine explizite Formel

$$l = \alpha \frac{dU}{dy} \sqrt{\frac{d^2 U}{dy^2}} \quad (50)$$

mit einer universellen dimensionslosen Konstanten α .

Über den Gültigkeitsbereich der obigen Betrachtung kann man von vornherein sagen, daß er dort aufhört, wo U' oder U'' verschwinden, da dann ψ in der Umgebung des betrachteten Punktes sich nicht mehr wie in der oben angeschriebenen Störungsgleichung (41) annähern läßt. Daß der Punkt, in dem der Differentialquotient der Hauptbewegung sein Vorzeichen wechselt (in der Mitte des Kanals), so daß sich auf beiden Seiten schwächer bewegte Flüssigkeit befindet, vor den anderen Punkten ausgezeichnet ist, läßt sich auch unmittelbar anschaulich einsehen. Natürlich bleibt die ganze Betrachtung unvollkommen, so lange man nicht wirklich eine Lösung der obigen Störungsgleichung von der verlangten Art hergestellt hat.

Ableitung der Geschwindigkeitsverteilung in Rohr und Kanal

Man kann nun mit den Formeln (49) und (50) für die Schubspannung und den Mischungsweg leicht die Geschwindigkeitsverteilung im Kanal oder im Rohr ausrechnen; denn die Schubspannung ist hier linear verteilt, so daß man mit τ_0 als Schubspannung an der Wand und y als Abstand von der Mitte des Rohres und r als Rohrradius hat

$$\tau = \tau_0 \frac{y}{r}.$$

Andererseits ist nach Gl. (49) und (50):

$$\tau_0 \frac{y}{r} = \rho l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = \rho \alpha^2 \frac{\left(\frac{dU}{dy} \right)^4}{\left(\frac{d^2 U}{dy^2} \right)^2}$$

oder

$$\frac{U'''}{U''^2} = \alpha \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{y}.$$

mit

$$r_0 = \int \frac{r_0}{y} dy$$

Diese Gleichung läßt sich sofort integrieren:

$$-\frac{1}{U''} = 2\alpha \frac{1}{r_0} \left(\frac{1}{y} - c \right).$$

wo a eine Integrationskonstante ist,

oder

$$U' = \frac{1}{2\alpha} \frac{r_0}{r} \frac{1}{(a - \frac{1}{y})}.$$

Die Integrationskonstante a wird aus der Randbedingung für U' bestimmt. Für sehr große Reynoldssche Zahlen ist $\frac{dU}{dy}$ nahe der Wand sehr groß und nähert sich dem laminaren Wert $\frac{dU}{dy} = \frac{\tau_0}{\mu}$, der wegen der Kleinheit von μ sehr groß ist. Wir können, ohne einen großen Fehler zu begehen, die Stelle wo $\frac{dU}{dy}$ unendlich wird, mit der Wand ($y=r$) zusammenfallen lassen. Damit erhalten wir die Integrationskonstante zu $a = \frac{1}{r}$ und

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{r_0}{r} \frac{1}{(\frac{1}{r} - \frac{1}{y})}$$

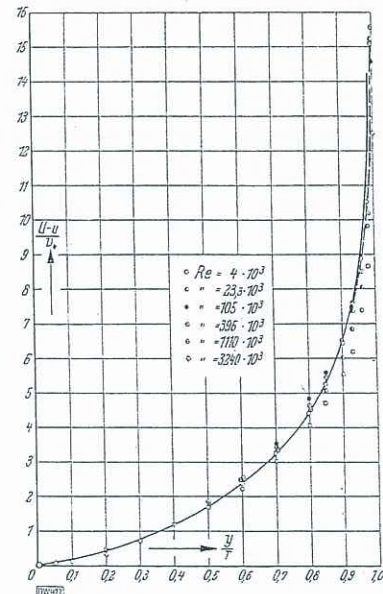


Abb. 31. $\frac{U_{\max} - U}{v_*}$ in Abhängigkeit von y/r

und durch Integration zwischen den Grenzen 0 und y

$$\frac{U_{\max} - U}{v_*} = -\frac{1}{\alpha} \left[\ln \left(1 - \sqrt{\frac{y}{r}} \right) + \sqrt{\frac{y}{r}} \right]. \quad (51)$$

Der Mischungsweg steigt nach dieser Lösung von der Wand linear an, wovon man sich auch in folgender Weise einfach überzeugen kann. In dieser Gegend ist die Schubspannung noch annähernd τ_0 , so daß hier die Gleichung

$$\tau_0 = \rho \alpha^2 \frac{U'^4}{U''^2}$$

gilt. Folglich ist hier mit y_1 als Wandabstand

$$-\int_r^y \frac{U''}{U'^2} dy = \left[\frac{1}{U'} \right]_{r-y}^{r-y} = \int_r^y \frac{1}{v_*} dy = \frac{y}{v_*},$$

wobei die Integrationskonstante vorbehaltlich späterer Verfeinerung (s. Abschn. über Widerstandsgesetz) angenähert gleich Null gesetzt werden kann, da U' an der Wand in der Tat sehr groß wird. Danach wird

$$U' = -\alpha \frac{1}{y_1} \frac{1}{y_1^2}$$

und

$$l = \alpha \left(\frac{U'}{U''} \right) = \alpha \frac{1}{y_1^2}$$

wie behauptet wurde. In welchen Grenzen diese Beziehung durch unsere Experimente bestätigt wird, geht aus Abb. 30 und 31 hervor.

Widerstandsgesetz

Unabhängig von dieser Theorie hat *v. Kármán* eine recht befriedigende Erklärung des Widerstandsgesetzes in glatten und rauhen Röhren gegeben.

Für die Betrachtung nimmt er über den Mischungsweg nur an, daß dieser von der Wand aus zunächst ansteigt ($l = zy$, wo y jetzt wieder den Wandabstand bedeutet) und im übrigen in allen Röhren unabhängig von der Wandbeschaffenheit und der Zähigkeit einen ähnlichen Verlauf hat,

$$\frac{l}{r} = z \frac{y}{r} f\left(\frac{y}{r}\right) \text{ mit } f=1 \text{ für kleine } \frac{y}{r}$$

oder

$$l = z \cdot y \cdot f\left(\frac{y}{r}\right); \quad (53)$$

eine Zone unmittelbar an der Wand, wo laminare Strömung herrscht, muß natürlich ausgeschlossen bleiben. Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r}\right)$$

oder wegen Gl. (53)

$$z \cdot y \cdot f\left(\frac{y}{r}\right) \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right) = v_* \sqrt{1 - \frac{y}{r}};$$

und wenn man zwischen den Grenzen y und r integriert, erhält man

$$U_{\max} - U = v_* \int_y^r \frac{1}{z \cdot y \cdot f(y/r)} \cdot dy$$

$$U_{\max} - U = v_* g\left(\frac{y}{r}\right). \quad (54)$$

wo g für alle glatten Röhre dieselbe Funktion ist. Die Gleichung $\frac{U_{\max} - U}{v_*} = f(y/r)$ ist nach unseren Versuchen

errechnet und in Zahlentafel 7 wiedergegeben. Diese Abhängigkeit ist in Abb. 31 dargestellt. Die ausgezogene Linie dieser Abbildung ist die Geschwindigkeitskurve nach Gl. (51) mit $z=0,36$. Die gestrichelte Kurve ist durch die Versuchspunkte gezogen. Man sieht, daß in der Nähe der Wand die gerechnete Geschwindigkeitskurve von den gemessenen eine Abweichung zeigt. Das kommt daher, daß die Ähnlichkeitsbetrachtung in der Nähe der Wand, wo der Einfluß der Zähigkeit vorhanden ist, nicht erfüllt ist.

Die Reibung oder Rauigkeit hat auf das Innere der Röhre nur Einfluß in Form einer Randbedingung. Die findet *v. Kármán* bei glatten Röhren in folgender Weise. In einer dünnen Schicht an der Wand von der Dicke δ ist die Geschwindigkeit nur durch die Zähigkeit bestimmt; daran soll sich unmittelbar die nach den obigen Formeln mit Hilfe des Mischungsweges errechnete Geschwindigkeitsverteilung anschließen. Dies ist natürlich eine nur sehr vereinfachte Darstellung des Zähigkeitseinflusses. δ ist also nur bis auf den Wert $z \cdot \delta$ abnehmend. δ kann andererseits nach dem bekannten Gedankengang, der nach *Prandtl* und *v. Kármán* zu den Geschwindigkeitsgesetzen in Wandnähe ($1/7$ -Potenzgesetz u. a.) führte, nur von physikalischen Größen in Wandnähe τ_0 , ρ , μ abhängen. Man setze also

$$\delta = \frac{\alpha}{z} \cdot \frac{r}{v_*},$$

wobei α wieder eine von der Reynoldsschen Zahl unabhängige, dimensionslose Konstante ist. In der Laminarschicht ist $\tau_0 = \mu \frac{du}{dy}$; an ihrem Rande hat man demnach die Geschwindigkeit

$$U_1 = \frac{\alpha}{z} v_*.$$

Die Geschwindigkeit außerhalb der Laminarschicht v

Zahlentafel 7

$\frac{U-u}{v_*}$ in Abhängigkeit von y/r

Re	4	6,1	9,2	16,7	23,3	43,4	105	205	396	725	1110	1596	1959	2350	2790	35
y/r	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$
1,00	12,52	12,92	13,48	12,50	15,20	15,50	14,60	16,65	16,30	14,90	15,60	16,00	14,90	13,09	13,80	15
0,98	8,66	8,98	9,15	8,65	9,65	9,48	10,60	10,59	10,20	10,54	11,06	11,05	10,09	10,36	10,50	10
0,96	7,40	7,65	7,80	7,45	8,06	8,00	8,88	8,95	8,50	8,71	8,83	9,11	8,54	8,79	9,30	8
0,93	6,20	6,36	6,76	6,39	6,86	6,74	7,51	7,64	7,35	7,31	7,59	7,51	7,35	7,39	7,51	6
0,90	5,53	5,63	5,74	5,67	6,06	5,99	6,62	6,66	6,45	6,45	6,55	6,41	6,45	6,33	6,47	4
0,85	4,69	4,73	4,70	4,77	5,10	5,05	5,61	5,56	5,45	5,33	5,35	5,49	5,37	5,25	5,23	3
0,80	4,04	4,06	4,07	4,14	4,42	4,35	4,84	4,65	4,66	4,56	4,52	4,50	4,60	4,45	4,40	2
0,70	3,02	3,05	3,10	3,20	3,28	3,24	3,52	3,50	3,45	3,40	3,36	3,28	3,38	3,28	3,18	1
0,60	2,26	2,32	2,32	2,33	2,42	2,38	2,58	2,64	2,58	2,52	2,50	2,40	2,53	2,40	2,38	
0,50	1,68	1,71	1,74	1,73	1,74	1,75	1,89	1,95	1,87	1,80	1,77	1,75	1,82	1,70	1,71	
0,40	1,21	1,23	1,29	1,24	1,23	1,19	1,26	1,38	1,31	1,24	1,20	1,17	1,24	1,11	1,17	
0,30	0,81	0,83	0,84	0,83	0,77	0,78	0,84	0,86	0,82	0,80	0,76	0,75	0,72	0,70	0,77	
0,20	0,39	0,48	0,52	0,48	0,43	0,45	0,47	0,57	0,46	0,45	0,40	0,39	0,37	0,34	0,42	
0,10	0,13	0,20	0,19	0,19	0,143	0,134	0,158	0,20	0,16	0,16	0,15	0,14	0,13	0,09	0,17	
0,04	0,05	0,07	0,065	0,06	0,046	0,067	0,052	0,03	0,07	0,04	0,04	0,05	0,04	0,03	0,05	
0,02	0,02	0,02	0,026	0,04	0,022	0,037	0,026	0,02	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	
0,00	0,00	0,00	0,000	0,00	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

U = maximale Geschwindigkeit; u = jeweilige Geschwindigkeit; $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ = Schubspannungsgeschwindigkeit;

τ_0 = Schubspannung an der Wand; $\rho = \frac{U^2}{2}$ = Staudruck der maximalen Geschwindigkeit;

ρ = Dichte; r = Abstand von der Rohrwand; r = Rohrradius.

eben. Diese Ab-
Die ausgezogene
geitskurve nach
urve ist durch
daß in der Nähe
skurve von der
ommt daher, daß
er Wand, wo ein
t erfüllt ist.

das Innere dem-
zung. Diese
folgender Weise.
n der Dicke δ ist
igkeit bestimmt,
obigen Formeln
eschwindigkeits-
ch eine nur sehr
influsses. l soll
 δ kann anderer-
der nach Prandtl
setzen in Wand-
r von physikali-
ngen. Man setzt

chen Zahl unab-
In der Laminar-
at man demnach

inarschicht wird

50	2790	3240
$-\frac{u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$	$\frac{U-u}{v_*}$
,09	13,80	15,10
,36	10,50	10,54
,79	9,30	8,90
,39	7,51	7,50
,33	6,47	6,45
,25	5,23	5,29
,45	4,40	4,45
,28	3,18	3,30
,40	2,38	2,40
,70	1,71	1,73
,11	1,17	1,56
,70	0,77	0,72
,34	0,42	0,36
,09	0,17	0,13
,03	0,05	0,05
,02	0,01	0,02
,00	0,00	0,00

hwindigkeit:

it:

$$U = \int_0^y v_* \sqrt{\left(1 - \frac{y}{r}\right)} \frac{1}{x \cdot y f(y/r)} dy + U_1.$$

Da der hauptsächlich Geschwindigkeitsanstieg sehr nahe der Wand erfolgt, genügt es, die Integration mit $f(y/r) = 1$ durchzuführen. Damit wird mit neuen Konstanten c und β näherungsweise

$$U_{\max} = \frac{1}{x} v_* [c - \ln \frac{\delta}{x} + \alpha] = \frac{1}{x} v_* [\ln \frac{r \cdot v_*}{x} + \beta]. \quad (55)$$

Führt man die auf die maximale Geschwindigkeit bezogene Widerstandsziffer

$$\psi = \frac{2}{U_{\max}^2} v_*^2$$

und dementsprechend die Reynoldssche Zahl

$$Re_{\max} = \frac{U_{\max} r}{\nu}$$

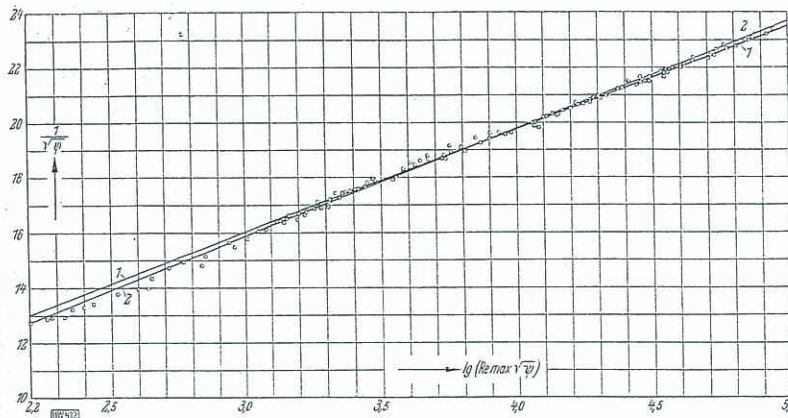


Abb. 32. $\frac{1}{\psi}$ in Abhängigkeit von $\lg(Re_{\max} \sqrt{\psi})$

ein, so ist $\frac{1}{\psi} = a + \frac{1}{x} \ln(Re_{\max} \sqrt{\psi})$. (56)

Die durch die Versuche ermittelten Werte für diese Gleichung sind in der Zahlentafel 8 wiedergegeben und in Abb. 32 dargestellt. Als Ordinate ist $\frac{1}{\psi}$ und als Abszisse

der gewöhnliche Logarithmus von $Re_{\max} \sqrt{\psi}$ aufgetragen. Da die Ähnlichkeitsbetrachtung streng genommen für reibungslose Flüssigkeiten gilt, und deshalb für den Vergleich mit dem Experiment nur solche Strömungen in Frage kommen, bei denen der Einfluß der Zähigkeit im Rohrrinnern sehr gering ist, haben wir eine Gerade (1) durch diejenigen Punkte gelegt, in denen praktisch kein Einfluß der Zähigkeit mehr vorhanden ist. Die Abb. 32 zeigt, daß unterhalb $\lg(Re_{\max} \sqrt{\psi}) = 3,6$ eine Abweichung von der eingetragenen Geraden vorhanden ist. Diese Abweichung nimmt mit abnehmendem $\lg(Re_{\max} \sqrt{\psi})$ zu. Das bedeutet, daß der Einfluß der Zähigkeit bei abnehmender Reynoldsscher Zahl immer stärker wird. Diese Gerade ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{\psi} = A + B \lg(Re_{\max} \sqrt{\psi}) \quad (56a)$$

wiedergegeben. Die Konstanten A und B sind aus dieser Abbildung ermittelt und ergaben $A = 4,75$; $B = 3,77$. Wie die Überlegung zeigt, gilt die Gleichung dieser Geraden für alle Strömungen, die von der Zähigkeit unbeeinflusst sind. Deshalb sind wir berechtigt, die Abhängigkeit $\frac{1}{\psi}$ von $\lg(Re_{\max} \sqrt{\psi})$ nach beliebig großen $Re_{\max}$ zu extrapolieren.

Außerdem haben wir für die folgenden Näherungsrechnungen eine zweite Gerade (2) gelegt, welche die Punkte im mittleren Bereich besonders berücksichtigt; ihre Gleichung ist

$$\frac{1}{\psi} = 4,16 + 3,90 \lg(Re_{\max} \sqrt{\psi}). \quad (56b)$$

Ähnlichkeitsbetrachtung nach Prandtl

Der Grundgedanke der oben ausführlich dargestellten v. Kármánschen Ähnlichkeitsbetrachtung ist die Annahme der geometrischen und mechanischen Ähnlichkeit des turbulenten Austauschmechanismus. Durch die Hypothese, daß die turbulente Schwankungsbewegung an verschiedenen Stellen der Hauptströmung sich nur durch einen Längen- und Zeitmaßstab unterscheidet, gelangt v. Kármán zu seinem universalen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für Kanal- und Rohrströmungen.

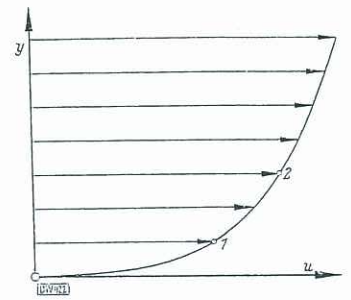


Abb. 33. Definitionsskizze

Von der Hauptströmung $u = u(y)$ werden dabei nur der erste und zweite Differentialquotient $\frac{du}{dy}$ und $\frac{d^2u}{dy^2}$ in Betracht gezogen. Prandtl²⁶⁾ steht auf dem Standpunkt, daß man eine solche Ähnlichkeit der Nebenbewegung streng genommen nur erwarten kann, wenn auch die Hauptbewegung derselben Ähnlichkeit genügt. Seien (1) und (2) zwei Punkte des Profils der Hauptströmung, so hat man beim Übergang von (1) zu (2) den Längenmaßstab wie y und den Zeitmaßstab wie $\frac{y}{u}$ zu ändern ($y =$ Abstand von der Ähnlichkeitsachse). Die allgemeinste Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$, welche die Ähnlichkeitsbetrachtung erfüllt, d. h. deren Kurve bei Änderung des y - und u -Maßstabes in sich übergeht, wird dargestellt durch die Gleichung

$$u = a y^n + b, \quad (57)$$

wobei a und b Konstanten bedeuten. Schon früher haben wir die für eine turbulente Strömung charakteristische

Größe $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ eingeführt ($\tau_0 = \rho v_*^2$). Die in dieser Weise durch die turbulente Schubspannung τ_0 definierte Größe v_* , welche die Dimension einer Geschwindigkeit hat, kann als ein Maß für die turbulente Störungsbewegung angesehen werden. Wegen der Gleichwertigkeit zweier Koordinatensysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, kann die turbulente Schwankungsgeschwindigkeit in einem beliebigen Punkt der Strömung von der Geschwindigkeit u der Hauptströmung

²⁶⁾ Diese Überlegung wurde von Prandtl in einer Ergänzungsverlesung zur Hydrodynamik, Sommer-Semester 1931, vorgetragen.

Zahlentafel 8

 $\frac{1}{\sqrt{f}}$ in Abhängigkeit von $\lg (Re_{max} | \sqrt{f})$

Nr.	U_{max} cm/s	$Re_{max} \cdot 10^{-3}$	τ_0 Dyn/cm ²	$Re_{max} \sqrt{f} \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{\sqrt{f}}$	Nr.	U_{max} cm/s	$Re_{max} \cdot 10^{-3}$	τ_0 Dyn/cm ²	$Re_{max} \sqrt{f} \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{\sqrt{f}}$
d = 1 cm						61	187,0	38,5	0,0600	2,23	17,
1	56,2	2,01	0,00995	0,159	12,72	62	218,0	44,8	0,0788	2,55	17,
2	63,4	2,35	0,01240	0,183	12,88	63	260,0	53,5	0,1075	2,99	17,
3	66,6	2,46	0,01375	0,192	12,82	64	126,0	23,5	0,0300	1,43	16,
4	74,6	2,76	0,0169	0,213	12,95	65	172,0	32,4	0,0529	1,92	16,
5	80,4	2,97	0,0190	0,225	13,18	66	236,0	46,1	0,0876	2,56	18,
6	90,0	3,33	0,0234	0,250	13,30	67	503,0	101,7	0,370	5,44	18,
7	98,5	3,65	0,0275	0,272	13,42	68	468,0	121,5	0,360	6,43	18,
8	125,7	4,65	0,0425	0,337	13,77	69	671,0	180,0	0,610	7,00	19,
9	150,8	6,14	0,0595	0,440	13,97	70	770,0	155,8	0,800	8,00	19,
10	152,5	5,65	0,0612	0,405	13,95	71	856,0	232,0	0,946	11,70	19,
11	174	6,44	0,0753	0,450	14,34	72	856,0	232,0	0,940	11,60	20,
12	206	7,63	0,1000	0,518	14,71	73	1068,0	285,0	1,425	14,10	20,
13	237,8	8,80	0,1300	0,590	14,93	74	1256,0	388,0	1,850	18,70	20,
14	226	10,20	0,1806	0,690	14,79	d = 10 cm					
15	311	14,22	0,3140	0,920	15,48	75	405	187,0	0,217	9,52	19,
d = 2 cm						76	442	204,5	0,250	10,25	19,
16	143,5	10,62	0,0460	0,705	15,12	77	458	211,5	0,273	10,70	19,
17	184,0	13,62	0,0710	0,870	15,62	78	545	552,0	0,373	12,50	20,
18	218,0	16,14	0,0983	1,030	15,74	79	562	261,0	0,396	12,92	20,
19	263,0	19,48	0,1370	1,210	16,10	80	596	276,0	0,440	13,60	20,
20	294,0	21,78	0,1645	1,325	16,40	81	622	288,0	0,480	14,20	20,
21	265,0	22,2	0,134	1,355	16,40	82	666	309,0	0,544	15,15	20,
22	290,0	24,3	0,1552	1,463	16,60	83	693	324,0	0,585	15,80	20,
23	317,0	26,6	0,184	1,595	16,69	84	770	346,0	0,710	16,75	20,
24	317,3	26,6	0,186	1,598	16,65	85	813	366,5	0,790	17,70	20,
25	337	28,27	0,207	1,690	16,70	86	896	404,0	0,943	19,36	20,
26	384	32,2	0,257	1,870	17,10	87	1015	420,0	1,200	20,04	20,
27	424	35,6	0,311	2,070	17,18	88	948	430,5	1,055	20,60	20,
28	450	37,7	0,340	2,160	17,42	89	976	450,0	1,110	21,48	20,
29	475	39,9	0,379	2,29	17,41	90	1085	500,0	1,340	23,60	20,
30	512	43,0	0,437	2,460	17,50	91	915	594,0	0,930	27,80	20,
31	547	46,0	0,495	2,6160	17,58	92	1443	640,0	2,270	29,80	20,
32	596	50,0	0,580	2,825	17,65	93	1015	660,0	1,138	30,70	20,
33	644	54,0	0,662	3,015	17,91	94	1084	613,0	1,305	28,60	20,
34	768	64,4	0,925	3,575	18,00	85	1155	760,0	1,440	34,80	20,
35	827	69,4	1,032	3,775	18,35	96	1120	780,0	1,350	35,70	20,
36	901	75,5	1,2025	4,060	18,55	97	1170	825,0	1,240	37,50	20,
37	975	82,6	1,3915	4,430	18,60	98	1045	746,0	1,176	34,20	20,
38	1040	88,1	1,5800	4,710	18,69	99	793	555,0	0,695	25,80	20,
39	1155	99,5	1,9400	5,310	18,71	100	882	617,0	0,850	28,50	20,
40	1254	108,2	2,2200	5,700	18,95	101	958	671,0	1,000	31,00	20,
d = 3 cm						102	1108	775,0	1,305	35,40	20,
41	483	63,5	0,371	3,54	17,94	103	306	141,0	0,1284	7,33	19,
42	530	69,8	0,428	3,81	18,31	104	336	155,0	0,1530	7,98	19,
43	592	78,0	0,525	4,22	18,48	105	364	168,0	0,177	8,59	19,
44	657	88,8	0,652	4,70	18,80	106	384	177,0	0,197	9,05	19,
45	754	99,4	0,820	5,38	18,80	107	846	347,0	0,850	16,75	20,
46	819	108,0	0,935	5,64	19,15	108	937	387,5	1,040	18,70	20,
47	901	118,6	1,140	6,20	19,08	109	1168	519,0	1,557	24,55	20,
48	1045	137,0	1,480	7,06	19,42	110	1528	670,0	2,540	31,00	20,
49	1198	156,0	1,910	7,96	19,60	111	1949	885,0	4,000	40,3	20,
50	1304	169,0	2,245	8,60	19,62	112	2020	920,0	4,170	41,6	20,
d = 5 cm						113	1620	978,0	2,675	44,75	20,
51	112,5	22,8	0,0245	1,400	16,25	114	2212	1005,0	5,000	45,2	20,
52	151,5	30,7	0,0414	1,825	16,84	115	1869	1169,0	3,550	52,0	20,
53	210,0	42,6	0,0736	2,340	17,48	116	1870	1183,0	3,540	52,9	20,
54	247,0	50,2	0,0985	2,820	17,80	117	2010	1220,0	4,030	54,0	20,
55	286,0	58,1	0,1300	3,240	17,92	118	2207	1318,0	4,780	57,6	20,
56	87,5	18,0	0,01520	1,125	16,04	119	2208	1345,0	4,850	59,2	20,
57	111,8	23,0	0,0238	1,405	16,36	120	2465	1135,0	6,250	51,0	20,
58	125,4	25,7	0,0296	1,562	16,45	121	2300	1470,0	5,200	64,2	20,
59	142,3	28,0	0,0372	1,680	16,65	122	2446	1650,0	5,800	71,5	20,
60	171,0	35,2	0,0511	2,06	17,10	123	2463	1610,0	5,86	70,0	20,
						124	2525	1701,0	6,04	73,5	20,
						125	2756	1930,0	7,20	83,2	20,

 $w = \frac{\tau_0}{\eta}$ = Widerstandszahl bezogen auf die maximale Geschwindigkeit; τ_0 = Schubspannung an der Wand; $q = \rho \frac{U_{max}^2}{2}$ = Staudruck der maximalen Geschwindigkeit; ρ = Dichte; $Re = \frac{U_{max} d}{\nu}$ = Reynoldssche Zahlder maximalen Geschwindigkeit; d = Rohrdurchmesser; ν = kinematische Zähigkeit.

$\sqrt{\psi} \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{\sqrt{\psi}}$
2,23	17,25
2,55	17,55
2,99	17,94
1,43	16,48
1,92	16,88
2,56	18,02
5,44	18,70
6,43	18,95
7,00	19,42
8,00	19,50
11,70	19,84
11,60	20,00
14,10	20,25
18,70	20,82

9,52	19,60
10,25	19,95
10,70	19,80
12,50	20,21
12,92	20,21
13,60	20,32
14,20	20,29
15,15	20,42
15,80	20,50
16,75	20,65
17,70	20,65
19,36	20,85
20,04	20,22
20,60	20,88
21,48	20,96
23,60	21,19
27,80	21,36
29,80	21,50
30,70	21,50
28,60	21,45
34,80	21,80
35,70	21,82
37,50	21,98
34,20	21,82
25,80	21,50
28,50	21,65
31,00	21,65
35,40	21,92
7,33	19,26
7,98	19,42
8,59	19,57
9,05	19,55
16,75	20,71
18,70	20,76
24,55	21,25
31,00	21,65
40,3	22,00
41,6	22,13
44,75	22,38
45,2	22,25
52,0	22,42
52,9	22,44
54,0	22,65
57,6	22,82
59,2	22,68
51,0	22,31
64,2	22,80
71,5	23,0
70,0	23,0
73,5	23,1
88,2	23,2

der Wand:

the Zan:

nicht abhängen, sondern nur von den Werten der Differentialquotienten $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, ... in dem betreffenden Punkt und außerdem von dem Abstand y des Punktes von der Ähnlichkeitsachse. Prandtl macht deswegen mit zunächst unbestimmten Exponenten p und q den einfachen Ansatz

$$v_* \sim y^p \left(\frac{du}{dy} \right)^q \quad (58)$$

Die einzig möglichen Werte, für welche diese Formel dimensionsrichtig ist, sind $p=1$; $q=1$, so daß man hat

$$v_* = x \cdot y \frac{du}{dy},$$

wo x eine universale Konstante bedeutet. Als einfachsten Fall nimmt jetzt Prandtl $\tau = \text{const}$ an und damit $v_* = \text{const}$. Dann kann man die letzte Gleichung integrieren und erhält

$$u = \frac{v_*}{x} \ln y + \text{const} = \frac{v_*}{x} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right) \quad (59)$$

Über die Konstante y_0 läßt sich aussagen, daß sie die Dimension einer Länge hat. Sie ist ein Maß für die Dicke der in unmittelbarer Nähe der Wand vorhandenen Laminarschicht. Die einzig mögliche Länge, die man aus den charakteristischen Konstanten der turbulenten Strömung bilden kann,

ist $\frac{r}{v_*}$. Wir schreiben deshalb

$$y_0 = \text{Zahl} \cdot \frac{r}{v_*} = m \frac{r}{v_*}; \quad (60)$$

damit wird aus (59)

$$u = \frac{v_*}{x} \left\{ \ln \frac{y \cdot v_*}{r} - \ln m \right\}$$

oder

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{x} \left\{ \ln \frac{y \cdot v_*}{r} - \ln m \right\}, \quad (61)$$

und mit

$$\frac{u}{v_*} = q \quad \text{und} \quad \frac{y \cdot v_*}{r} = \eta$$

hat man

$$q = A + B \ln \eta. \quad (62)$$

Die Messungen ergeben

$$A = -\frac{1}{x} \ln m = 5,5, \quad B = \frac{1}{x} = 2,5,$$

also $x = 0,40$ und $m = \frac{1}{9}$.

Die Dicke δ der Laminarschicht ist also von der Größenordnung

$$\delta_0 = \frac{1}{9} \frac{r}{v_*},$$

wobei über den zu y_0 hinzutretenden Zahlenfaktor noch nichts ausgesagt ist. Die Gleichung (62) ist genau der gleiche Ausdruck für die Geschwindigkeitsverteilung, auf welchen v. Kármán durch seine Ähnlichkeitsbetrachtung kommt, wie das auch erwartet werden mußte.

6. Widerstandsgesetz

Die schon definierte Widerstandszahl $\lambda = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{d}{q}$ ist in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl in einem großen Bereich ermittelt und in Abb. 34 im logarithmischen Maßstabe aufgetragen. Die eingetragenen Punkte (Zahlentafel 9) stellen die Werte $\lg(1000\lambda)$ dar, beginnend von sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen von etwa $3 \cdot 10^3$ bis zur oberen Grenze. Die gemessenen Werte bis zur Reynoldsschen Zahl $100 \cdot 10^3$ ($\lg Re = 5$) stimmen mit der Blasius'schen Formel $\lambda_B = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$, die in dieser Abbildung durch die Kurve 1 dargestellt ist, gut überein. Oberhalb dieser

Grenze weichen die gemessenen λ -Werte mit zunehmender Reynoldsscher Zahl immer mehr von der Blasius'schen Geraden nach oben ab. Lees²⁷⁾ hat eine Formel von der Bauart

$$\lambda = a + \frac{b}{Re^n}$$

aus den Messungen von Stanton und Pannell gewonnen, die sich bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 460 \cdot 10^3$ ($\lg Re = 5,67$) erstrecken, nämlich $\lambda = 0,0072 + \frac{0,6104}{Re^{0,35}}$.

Da unsere Meßergebnisse mit denen von Stanton und Pannell übereinstimmen, werden sie in diesem Bereich auch durch die Lees'sche Formel wiedergegeben. Außerhalb dieses Bereiches ergeben unsere Messungen eine Abweichung der Widerstandswerte von der Lees'schen Kurve, die in Abb. 34 mit 2 bezeichnet ist. Wie aus dieser Abbildung ersichtlich ist, wird diese Abweichung mit wachsender Reynoldsscher Zahl größer. Neuerdings haben Schiller und Hermann²⁸⁾ auf Grund ihrer und unserer Messun-

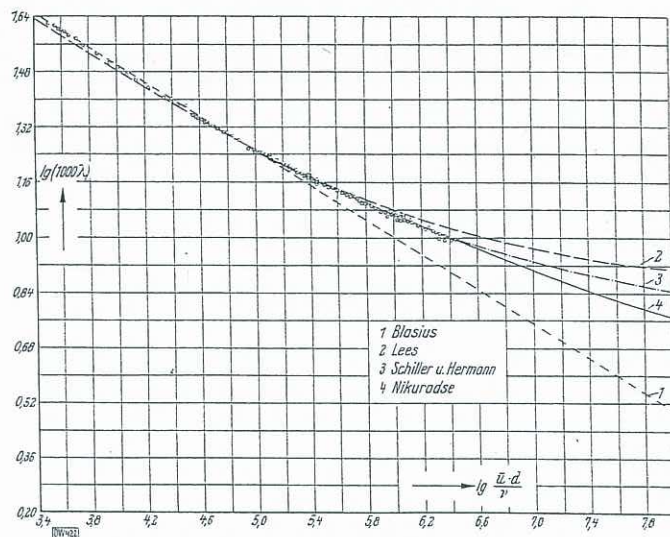


Abb. 34. $\lg(1000\lambda)$ in Abhängigkeit von $\lg \left(\frac{Re \cdot d}{r} \right)$

gen nach dem Lees'schen Ansatz $\lambda = a + \frac{b}{Re^n}$ die Näherungsformel

$$\psi = 0,00270 + \frac{0,161}{Re^{0,3}}$$

aufgestellt, wobei $\psi = \frac{\lambda}{2}$ und $Re = \frac{u \cdot r}{\nu}$ ist. Da es im allgemeinen üblich ist, Reynoldssche Zahl und Widerstandszahl auf den Rohrdurchmesser zu beziehen, rechnen wir die Schiller'sche²⁹⁾ Formel hierauf um. Dies ergibt die Formel

$$\lambda = 0,0054 + \frac{0,396}{Re^{0,3}}, \quad (63)$$

die in Abb. 34 durch die strichpunktierte Kurve 3 dargestellt ist. Man sieht, daß die Schiller'sche Kurve mit derjenigen von Stanton und Pannell bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 4,6 \cdot 10^5$ ($\lg Re = 5,67$) zusammenfällt. Von dort an stimmt die Schiller'sche Kurve mit den von uns

²⁷⁾ Ch. H. Lees, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), Bd. 91 (1915), S. 40.

²⁸⁾ L. Schiller und R. Hermann: Widerstand von Platte und Rohr bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Ing.-Arch. 1930, Bd. 1, Heft 4, S. 392.

²⁹⁾ L. Schiller: Rohrströmung bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge aus d. Geb. der Aerodyn. u. verwandter Gebiete. Arch. 1929, herausgeg. v. A. Gültel, L. Eötvös und Th. v. Kármán, Berlin 1929, Seite 78.

Zahlentafel 9

lg λ bzw. $\frac{\bar{u}}{U_{\max}}$ in Ab-
hängigkeit von lg Re
und $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ in Abhängig-
keit von lg $Re \sqrt{\lambda}$

Nr.	$\bar{u}$ cm/s	ν cm ² /s	$Re \cdot 10^{-3}$	$\frac{dp}{dx}$ Dyn/cm ²	λ	$Re \sqrt{\lambda} \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{\bar{u}}{U_{\max}}$
d = 1 cm								
1	42,8	0,0140	3,07	0,0398	0,0426	0,634	4,85	0,760
2	48,5	0,0135	3,59	0,0496	0,0414	0,780	4,92	0,765
3	51,4	0,0135	3,81	0,0550	0,0408	0,770	4,95	0,770
4	57,6	0,0135	4,27	0,0676	0,0399	0,854	5,00	0,771
5	62,0	0,0135	4,60	0,0760	0,0388	0,906	5,08	0,771
6	70,2	0,0135	5,20	0,0936	0,0372	1,004	5,18	0,780
7	76,9	0,0135	5,70	0,1100	0,0363	1,086	5,25	0,780
8	98,5	0,0135	7,30	0,1700	0,0343	1,352	5,40	0,784
9	118,8	0,0135	8,80	0,238	0,0326	1,590	5,54	0,788
10	121,0	0,0135	8,97	0,245	0,0329	1,626	5,52	0,794
11	137,5	0,0135	10,9	0,3012	0,0311	1,800	5,67	0,791
12	163,3	0,0135	12,1	0,400	0,0294	2,075	5,83	0,793
13	189,0	0,0135	14,0	0,520	0,0285	2,362	5,92	0,795
14	226,0	0,0135	16,7	0,723	0,0278	2,785	6,00	0,811
15	311,0	0,0136	23,0	1,255	0,0254	3,665	6,28	0,815
d = 2 cm								
16	114,6	0,0135	17,0	0,092	0,0274	2,81	6,04	0,800
17	148,4	0,0135	22,0	0,142	0,0253	3,50	6,29	0,807
18	175,5	0,0135	26,0	0,1966	0,0250	4,11	6,33	0,805
19	212,5	0,0135	31,5	0,274	0,0237	4,85	6,50	0,808
20	240,0	0,0135	35,6	0,329	0,0224	5,33	6,68	0,816
21	214,4	0,0119	36,0	0,264	0,02243	5,40	6,68	0,809
22	233,6	0,0119	39,2	0,3104	0,0223	5,85	6,70	0,806
23	258,0	0,0119	43,2	0,368	0,02274	6,51	6,64	0,814
24	259,6	0,0117	44,4	0,372	0,0216	6,53	6,80	0,818
25	275,8	0,0119	46,4	0,414	0,0212	6,76	6,86	0,818
26	315	0,0119	53,0	0,514	0,0196	7,42	7,14	0,820
27	349	0,0119	58,7	0,622	0,0201	8,33	7,06	0,823
28	370	0,0119	62,2	0,680	0,0188	8,52	7,30	0,822
29	392	0,0119	66,0	0,758	0,0194	9,19	7,18	0,825
30	425	0,0119	71,4	0,874	0,0190	9,84	7,26	0,830
31	454	0,0119	76,2	0,990	0,01885	10,45	7,28	0,830
32	495	0,0119	83,3	1,160	0,0188	11,41	7,29	0,831
33	533,6	0,0119	89,6	1,324	0,0183	12,11	7,40	0,829
34	638	0,0119	107,3	1,850	0,0178	14,33	7,50	0,831
35	687	0,0119	115,2	2,064	0,0172	15,12	7,62	0,831
36	752	0,0119	126,5	2,405	0,0167	16,35	7,74	0,835
37	811	0,0118	137,5	2,783	0,01665	17,74	7,76	0,832
38	863	0,0118	146,0	3,16	0,0166	18,80	7,77	0,830
39	972	0,0116	168,0	3,88	0,01614	21,32	7,88	0,842
40	1053	0,0116	182,0	4,44	0,0157	22,93	7,94	0,840
d = 3 cm								
41	402	0,0114	106,0	0,495	0,0180	14,22	7,46	0,832
42	439	0,0114	115,5	0,570	0,0174	15,25	7,58	0,828
43	488	0,0114	128,5	0,700	0,0173	16,90	7,60	0,824
44	559	0,0114	147,0	0,870	0,01638	18,81	7,82	0,850
45	627	0,0114	165,0	1,092	0,01638	21,11	7,82	0,831
46	688	0,0114	181,0	1,246	0,01549	22,54	8,04	0,840
47	756	0,0114	199,0	1,520	0,01560	24,86	8,01	0,839
48	879	0,0114	231,0	1,970	0,01500	28,30	8,16	0,841
49	1010	0,0115	266,0	2,545	0,01470	32,30	8,24	0,843
50	1106	0,0115	288,0	2,990	0,01435	34,50	8,35	0,848
d = 5 cm								
51	91,4	0,01233	37,0	0,0196	0,0230	5,61	6,59	0,812
52	124,4	0,01233	50,3	0,0331	0,02104	7,30	6,90	0,818
53	172,0	0,01230	70,0	0,0588	0,0195	9,78	7,16	0,819
54	203,5	0,01230	82,6	0,0787	0,0186	11,26	7,34	0,819
55	237,0	0,01230	96,4	0,1040	0,01811	12,96	7,44	0,829
56	71,2	0,01214	29,3	0,01215	0,0226	4,40	6,66	0,814
$\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = kinematische Zähigkeit; μ = Zähigkeitskonstante; ρ = Dichte; Re = Reynoldssche Zahl; d = Rohrdurchmesser; $\frac{dp}{dx}$ = Druckgefälle; $\lambda = \frac{dp}{dx} \frac{d}{\bar{u}^2}$ = Widerstandszahl; $q = \frac{\bar{u}^2}{2}$ = Staudruck der mittleren Geschwindigkeit; $U_{\max}$ = maximale Geschwindigkeit.								

gemessenen Werten bis etwa $Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = 2,5 \cdot 10^6$ bzw.
 lg $Re = 6,4$ überein. Von lg $Re = 6,4$ an weicht die
 Schiller'sche Kurve von unserer Kurve ab. Diese Abwei-
 chung wird mit zunehmender Reynoldsscher Zahl immer

größer. Die Abweichungen der Formeln von Lenz und
 Schiller-Hermann von den gemessenen Kurven kommen da-
 durch zustande, daß die Formeln direkt aus den Mes-
 sungen abgeleitet sind und daher nur soweit zutreffen, als die
 Versuche jeweils reichen. Es ist uns nun gelungen, auf

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{\bar{u}}{U_{\max}}$	Nr.	$\bar{u}$ cm/s	v cm ² /s	$Re \cdot 10^{-3}$	$\frac{dp}{dx}$ Dyn/cm ²	λ	$Re \sqrt{\lambda} \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{\bar{u}}{U_{\max}}$
d = 5 cm (Fortsetzung)										
4,85	0,760	57	90,8	0,01214	37,4	0,0190	0,0226	5,62	6,66	0,812
4,92	0,765	58	102,5	0,0122	42,0	0,0237	0,0220	6,23	6,75	0,817
4,95	0,770	59	116,5	0,0122	47,7	0,0298	0,02146	6,98	6,83	0,819
5,00	0,771	60	140,0	0,01215	57,6	0,0409	0,02042	8,23	7,00	0,819
5,08	0,771	61	153,5	0,01215	63,2	0,0480	0,01990	8,92	7,09	0,821
5,18	0,780	62	179,5	0,01215	73,8	0,0630	0,01915	10,21	7,23	0,823
5,25	0,780	63	214,4	0,01214	88,3	0,0860	0,01830	11,95	7,40	0,825
5,40	0,784	64	103,0	0,0134	38,4	0,0240	0,0222	5,72	6,71	0,817
5,54	0,788	65	141,0	0,0133	53,0	0,0423	0,02085	7,65	6,93	0,820
5,52	0,794	66	194,5	0,0128	76,0	0,0701	0,0182	10,25	7,42	0,824
5,67	0,791	67	423,5	0,01235	171,5	0,296	0,01617	21,8	7,86	0,842
5,83	0,793	68	395,0	0,00925	213,4	0,250	0,01567	26,71	7,99	0,844
5,92	0,795	69	570,0	0,0097	294	0,488	0,01470	35,63	8,26	0,849
6,00	0,811	70	652,0	0,01235	264	0,640	0,01475	32,18	8,24	0,847
6,28	0,815	71	733	0,00925	396	0,757	0,0138	41,52	8,51	0,856
		72	740,0	0,00925	400	0,752	0,01344	46,40	8,63	0,862
		73	912,8	0,00925	493,4	1,140	0,01325	56,8	8,69	0,855
		74	1082,0	0,0081	670	1,470	0,01229	74,3	9,02	0,861
d = 10 cm										
6,04	0,800	75	345,9	0,01083	318,9	0,0868	0,01421	38,0	8,39	0,854
6,29	0,807	76	377,1	0,01080	348,6	0,1008	0,01388	41,06	8,49	0,853
6,33	0,805	77	392,7	0,01083	363,0	0,1092	0,01390	42,80	8,48	0,857
6,50	0,808	78	466,3	0,01080	431,5	0,1492	0,01342	50,00	8,62	0,856
6,68	0,816	79	482,8	0,01079	446,8	0,1582	0,01334	51,6	8,66	0,859
6,68	0,809	80	510,0	0,01079	472,0	0,1760	0,01328	54,40	8,67	0,855
6,70	0,806	81	533,2	0,01080	493,7	0,1920	0,01324	56,82	8,69	0,857
6,80	0,818	82	569,1	0,01079	562,6	0,2175	0,01320	60,50	8,71	0,855
6,86	0,818	83	602,0	0,01072	597,0	0,2340	0,01277	63,30	8,87	0,869
7,14	0,820	84	660,3	0,0110	600,0	0,2840	0,01277	67,80	8,86	0,858
7,06	0,823	85	704,0	0,0111	634	0,316	0,0125	70,90	8,95	0,866
7,30	0,822	86	769,8	0,0110	700	0,387	0,0129	79,50	8,80	0,859
7,18	0,825	87	876	0,0121	725	0,480	0,01228	80,40	9,02	0,863
7,26	0,830	88	810	0,0111	737	0,422	0,0126	82,80	8,91	0,854
7,28	0,830	89	843,4	0,01094	771	0,444	0,01227	85,42	9,02	0,864
7,29	0,831	90	940,0	0,01086	865	0,536	0,01188	94,24	9,18	0,866
7,40	0,829	91	790	0,0077	1025	0,372	0,01170	110,9	9,25	0,863
7,50	0,831	92	1248	0,01125	1108	0,92	0,01159	119,3	9,29	0,864
7,62	0,831	93	882	0,0077	1148	0,455	0,01146	123,0	9,34	0,869
7,74	0,835	94	944	0,0077	1225	0,522	0,01150	131,25	9,33	0,871
7,76	0,832	95	1005	0,0076	1320	0,576	0,01118	139,60	9,46	0,870
7,77	0,830	96	982	0,0072	1364	0,540	0,0110	143,20	9,53	0,877
7,88	0,842	97	1020	0,0071	1438	0,596	0,01122	152,3	9,45	0,872
7,94	0,840	98	900	0,0070	1285	0,471	0,01144	137,5	9,35	0,861
		99	685	0,0070	979	0,278	0,01161	105,0	9,28	0,864
7,46	0,832	100	761	0,0070	1088	0,340	0,0115	116,7	9,33	0,862
7,58	0,828	101	830	0,0070	1185	0,400	0,0114	126,6	9,37	0,866
7,60	0,824	102	958	0,0070	1368	0,522	0,01115	144,4	9,47	0,865
7,82	0,850	103	259	0,01087	238,8	0,514	0,0150	29,25	8,17	0,846
7,82	0,831	104	286,8	0,01083	264,4	0,612	0,01459	31,92	8,29	0,854
8,04	0,840	105	309,5	0,01083	285,4	0,708	0,01446	34,30	8,32	0,850
8,01	0,839	106	325,4	0,01083	300,0	0,788	0,01457	36,24	8,28	0,847
8,16	0,841	107	726,0	0,0122	595	0,340	0,01265	66,90	8,90	0,858
8,24	0,843	108	806	0,0121	666	0,416	0,01255	74,60	8,93	0,860
8,35	0,848	109	1013	0,01125	900	0,623	0,0119	98,10	9,17	0,867
		110	1325	0,01125	1178	1,015	0,0113	125,2	9,41	0,867
		111	1691	0,0110	1539	1,600	0,01098	161,4	9,54	0,868
		112	1765	0,0110	1600	1,670	0,0105	164,0	9,76	0,874
		113	1410	0,0083	1700	1,070	0,01060	175,1	9,71	0,870
		114	1926	0,0083	1850	2,000	0,01058	190,4	9,72	0,871
		115	1630	0,0080	2038	1,420	0,01043	208,0	9,80	0,872
		116	1630	0,0079	2062	1,415	0,01045	210,5	9,79	0,872
		117	1758	0,00825	2130	1,615	0,01029	216,0	9,87	0,875
		118	1940	0,0084	2310	1,910	0,00995	230,8	10,02	0,879
		119	1930	0,0082	2351	1,94	0,01021	237,5	9,89	0,874
		120	2150	0,0110	1964	2,499	0,0106	202,3	9,71	0,872
		121	2010	0,0078	2580	2,050	0,00995	257,2	10,02	0,874
		122	2150	0,0079	2722	2,317	0,0098	269,5	10,10	0,879
		123	2162	0,0077	2810	2,345	0,00985	279,2	10,06	0,878
		124	2220	0,0074	3000	2,470	0,00988	298,2	10,06	0,879
		125	2435	0,0075	3230	2,88	0,00960	321,0	10,07	0,880

Zahlentafel 9

lg λ bzw. $\frac{\bar{u}}{U_{\max}}$ in Abhängigkeit von lg Re und $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ in Abhängigkeit von lg $Re \sqrt{\lambda}$

Höchstkonstante:

= Druckgefälle:

Geschwindigkeit:

meh von Lees und Kurven kommen dann aus den Messungen zutreffen, als die man gelungen, auf

einem anderen unten gezeigten Wege eine Näherungsformel zu gewinnen, die sich an die obere Grenze des Blasius'schen Gesetzes anschließt und deren Gültigkeit bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 1 \cdot 10^6$ (lg $Re = 6,0$) gesichert erscheint. Diese Formel ist durch die Kurve 4 wie-

dergegeben. Man sieht, daß diese Kurve bei der oberen Grenze (lg $Re = 6,4$) von der Schiller-Hermannschen Kurve nach unten abzweigt und bei der Reynoldsschen Zahl $1 \cdot 10^6$ stärker von der Schiller'schen Kurve abweicht, als diese von der Leesschen.

Die bisherigen Methoden liefern uns nur Formeln für den experimentell untersuchten Bereich. Die *v. Kármán*-sche Darstellung von Seite 43 legt jedoch nahe, eine der *v. Kármán*-schen Formel gleich gebaute Formel anzusetzen, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A + B \lg (Re \sqrt{\lambda}). \quad (64)$$

Der Unterschied besteht darin, daß *v. Kármán* die Widerstands- und Reynoldssche Zahl auf die maximale Geschwindigkeit und den Rohrdurchmesser bezieht, während wir die mittlere Geschwindigkeit und den Rohrdurchmesser benutzen. Setzt man $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = y$ und $\lg (Re \sqrt{\lambda}) = x$, so nimmt diese Gleichung die Form an

$$y = A + Bx.$$

In Abb. 35 ist nach den Messungen $y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ als Funktion von $x = \lg (Re \sqrt{\lambda})$ aufgetragen (Zahlentafel 9). Es er-

Wir können nun diese Darstellung in ähnlicher Weise zur Gewinnung einer bequemeren Näherungsformel für λ heranziehen wie *Lees* und *Schiller* und *Hermann* dies auf Grund von Versuchen getan haben. Der Bereich der neuen Formel soll dort beginnen, wo die *Blasiussche* Formel aufhört. Als Ende des Bereiches setzen wir $Re = 1 \cdot 10^6$ fest.

Aus der Kurve 4 der Abb. 34 findet man für die Konstanten der Näherungsformel

$$\lambda = a + \frac{b}{Re^n}$$

die Werte $a = 0,0032$, $b = 0,221$, $n = 0,237$;

damit wird

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}}. \quad (65)$$

Um die Gültigkeit der oben angegebenen Formeln von *Blasius*, *Lees*, *Schiller* und *Hermann* und uns zu prüfen,

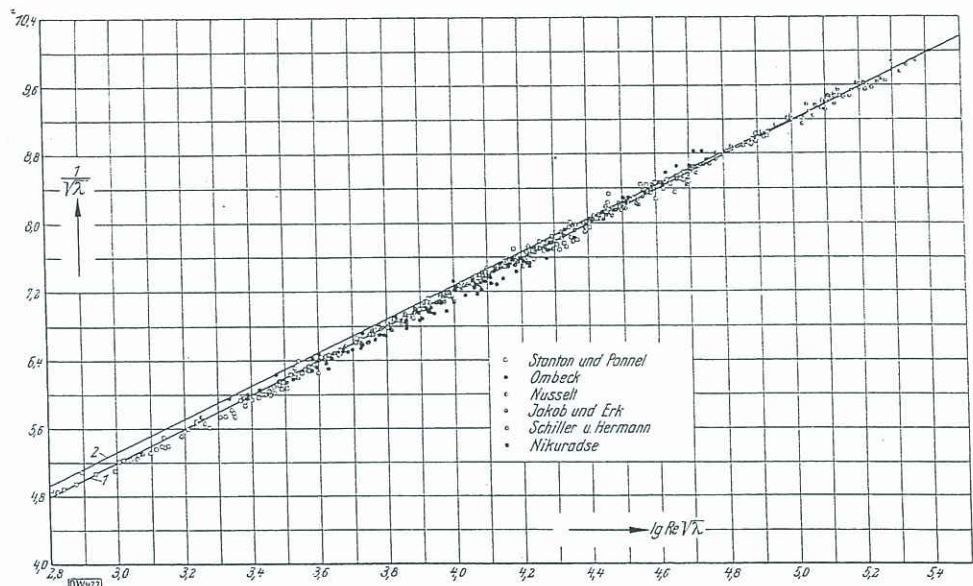


Abb. 35. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ in Abhängigkeit von $\lg (Re \sqrt{\lambda})$

gibt sich die Gerade 1 und für die Konstanten A und B die Werte $A = -0,8$ und $B = 2,0$. In Abb. 35 sind auch die Versuchsergebnisse verschiedener Forscher eingetragen, wobei bei Durchlegung der Geraden weniger Gewicht auf die *Ombeck*-schen Werte gelegt wurde, weil diese mit Luft durchgeführten Versuche wegen der Volumenänderungen der Luft etwas weniger sicher sind. Aus $x = \lg (Re \sqrt{\lambda})$ berechnen wir die Werte $Re \sqrt{\lambda}$, dividieren durch $\frac{1}{y} = \sqrt{\lambda}$ und bekommen die Reynoldssche Zahl Re . Somit haben wir aus obiger Gleichung eine Abhängigkeit der Widerstandszahl von der Reynoldsschen Zahl erhalten

$$\lambda = f(Re).$$

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit kann man erwarten, daß wir auch diese Formel ziemlich weit extrapolieren dürfen, wenn auch nicht bis $Re = \infty$, wie die *v. Kármán*-sche.

In Abb. 36 ist die Beziehung $\lambda = f(Re)$ dargestellt, wie sie sich ergibt, wenn man mit den aus den Messungen bestimmten Konstanten A und B auf große Reynoldssche Zahlen bis $Re = 1 \cdot 10^6$ extrapoliert.

ist in Abb. 37 die Beziehung $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = f[\lg(Re \sqrt{\lambda})]$ nach der

entsprechenden Formeln berechnet und aufgetragen. Die eingetragenen Punkte sind aus den von uns gemessenen Werten errechnet. Unterhalb $\lg Re \sqrt{\lambda} = 3,7$ liegen die

Werte von $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ unterhalb dieser Geraden. Dies ist dadurch

zu erklären, daß der Einfluß der Zähigkeit bei diesen Reynoldsschen Zahlen wesentlich wird. Oberhalb der angegebenen Grenze ist der Zähigkeitseinfluß verschwindend gering, und die Versuchspunkte liegen auf der Geraden. Die durch die *Blasiussche* Formel errechnete Kurve 1 weicht unterhalb $\lg (Re \sqrt{\lambda}) = 4,0$ (was einer Reynoldsschen Zahl Re von etwa $40 \cdot 10^3$ entspricht) von der Geraden 4 ab; oberhalb dieser angegebenen Reynoldsschen Zahl bis etwa $\lg (Re \sqrt{\lambda}) = 5,3$ (entsprechend einer Reynoldsschen Zahl Re etwa $100 \cdot 10^3$) deckt die Kurve die Gerade 4. Im weiteren Verlauf weicht die Kurve 1 erheblich von der Geraden 4 nach oben ab. Außerdem zeigt die Kurve 1 Übereinstimmung mit Früherem, daß die *Blasiussche*

ähnlicher Weise
angangsformel für λ
Lermann dies auf
Der Bereich der
die Blasiusche
iches setzen wir

nan für die Kon-

= 0,237;

(65)

nen Formeln von
id uns zu prüfen,



$g(Re\sqrt{\lambda})$ nach den

aufgetragen. Die
on uns gemessenen
 $\lambda = 3,7$ liegen die

n. Dies ist dadurch

zeit bei diesen Rey-
verhalb der angege-
verschwindend ge-
tf der Geraden. Die
te Kurve 1 weicht
Reynoldsschen Zahl
der Geraden 4 ab;
schen Zahl bis etwa
Reynoldsschen Zahl
Gerade 4. Im we-
chlich von der Ge-
gt die Kurve 1, m
uß das Blasiusche

Gesetz nur Gültigkeit bis $\lg(Re\sqrt{\lambda}) = 5,1$
hat, was einer Reynoldsschen Zahl $Re = 100 \cdot 10^3$ entspricht. Die Kurven 2 und 3
sind nach der Leesschen und Schillerschen
Formel berechnet und weichen bei $\lg(Re\sqrt{\lambda}) = 4,7$ ($Re = \text{etwa } 4,5 \cdot 10^5$) bzw. bei
in $(Re\sqrt{\lambda}) = 5,25$ ($Re = \text{etwa } 1,9 \cdot 10^6$) von
der Geraden ab. Wenn wir für Kurve 4 die
Widerstandswerte für $Re > 1 \cdot 10^8$ eintragen,
so tritt auch hier eine entsprechende Ab-
weichung ein.

Für die folgenden Näherungsrechnungen
ist noch eine zweite Gerade (2, Abb. 35)
gezogen mit der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,55 + 1,95 \lg(Re\sqrt{\lambda}). \quad (63a)$$

7. Beziehung zwischen der mittleren und der maximalen Geschwindigkeit

a) Nach einem Vorschlag von Prof. Prandtl läßt sich mit
Hilfe von Gl. (54) das v. Kármánsche Widerstandsgesetz
Gl. (56 b) mit unsrer Gl. (64 b) verknüpfen:

Nach der v. Kármánschen Darstellung Gl. (54) ist

$$\frac{U-u}{v_*} = f(y/r).$$

Hieraus läßt sich, indem man $\frac{U-u}{v_*}$ als Funktion von
(y/r)² aufträgt, durch graphische Integration die mitt-
lere Geschwindigkeit $\bar{u}$ ermitteln, so daß man

$$\frac{U-\bar{u}}{v_*} = \text{Zahl} = \beta \quad (66)$$

erhält. Durch Ausführen der Integration ergab sich
 $\beta = 4,03$. Mit Hilfe dieser Beziehung erhalten wir die

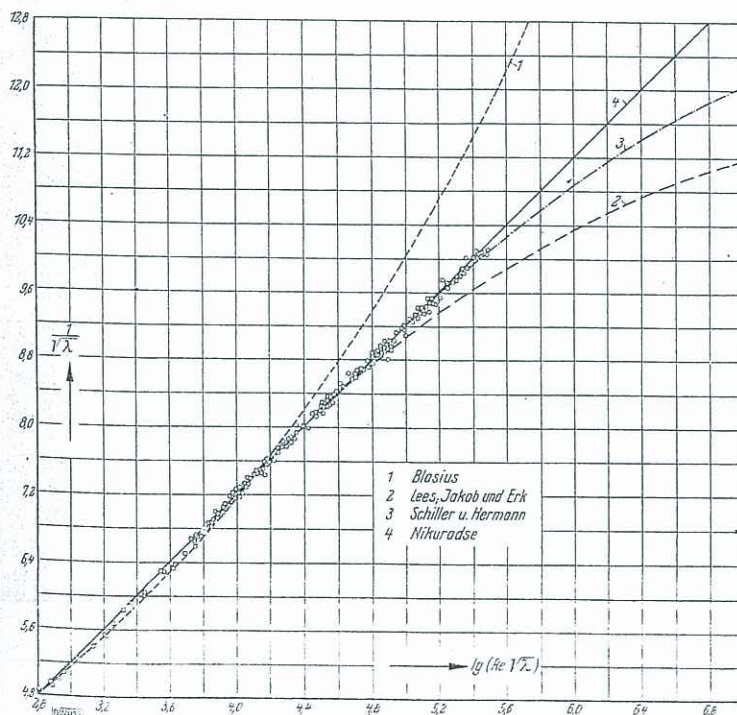


Abb. 37. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ in Abhängigkeit von $\lg(Re\sqrt{\lambda})$

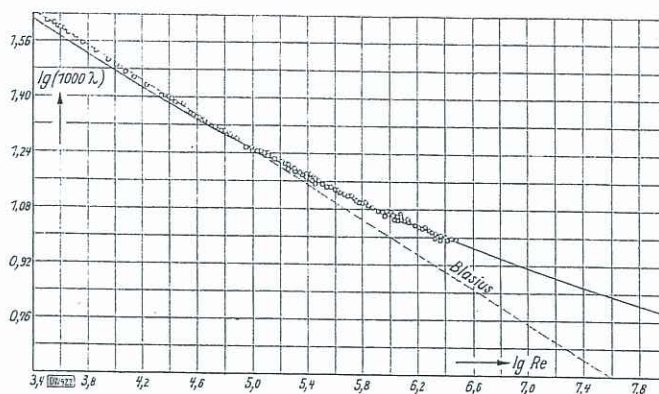


Abb. 36. $\lg(1000\lambda)$ in Abhängigkeit von $\lg Re$

Verknüpfung zwischen dem v. Kármánschen Widerstands-
gesetz und dem unsrigen folgendermaßen: Aus der v. Kármánschen
Gl. (56 b) folgt, wenn man

$$Re_{\max} = \frac{U \cdot r}{v_*} \quad \text{und} \quad \sqrt{\psi} = 1,414 \frac{v_*}{U}$$

einsetzt,

$$\frac{U}{v_*} = A + B \lg \left[1,414 \left(\frac{v_* \cdot r}{v} \right) \right]$$

oder

$$\frac{U}{v_*} = A' + B \lg \left(\frac{v_* \cdot r}{v} \right). \quad (67)$$

In analoger Weise erhalten wir aus unserem Widerstands-
gesetz Gl. (64 b), wenn wir

$$Re = \frac{\bar{u} \cdot 2r}{v_*} \quad \text{und} \quad \sqrt{\lambda} = 2,828 \frac{v_*}{\bar{u}}$$

einsetzen,

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = a + b \lg \left[2,828 \left(\frac{v_* \cdot r}{v} \right) \right]$$

$$\text{oder} \quad \frac{\bar{u}}{v_*} = a' + b \lg \left(\frac{v_* \cdot r}{v} \right). \quad (68)$$

Die Beziehung (66) erfordert jetzt,
daß in den Gl. (67) und (68) die
Konstanten B und b übereinstimmen.
Man kann diese Beziehung dazu be-
nutzen, um durch Ausgleichung zwi-
schen den verschiedenen Diagrammen
den besten Wert von $B = b$ heraus-
zuholen. Auf diese Ausgleichung
bezieht sich die in den Figuren
angegebene, früher schon erwähnte
Gerade 2. Der beste Wert von $B = b$
ergab sich zu 5,52. Damit findet man
nun weiter

$$A = 5,87, \quad a = -1,555$$

und daraus

$$A' = 6,68, \quad a' = 2,03.$$

Durch Einsetzen dieser Werte und
Subtraktion der Gl. (67) und (68)
folgt dann:

$$\frac{U-\bar{u}}{v_*} = 4,08, \quad (69)$$

in guter Übereinstimmung mit dem
früheren Resultat. In Abb. 38 sind
die Versuchswerte $\frac{U}{v_*}$ und $\frac{\bar{u}}{v_*}$ in Ab-

hängigkeit von $\lg \frac{v_* \cdot r}{v}$ aufgetragen.
Die letzten beiden hindurchgelegten
Geraden sind parallel, und die Diffe-
renz der Funktionswerte beträgt im
Mittel 4,03, wie vorstehend. Die

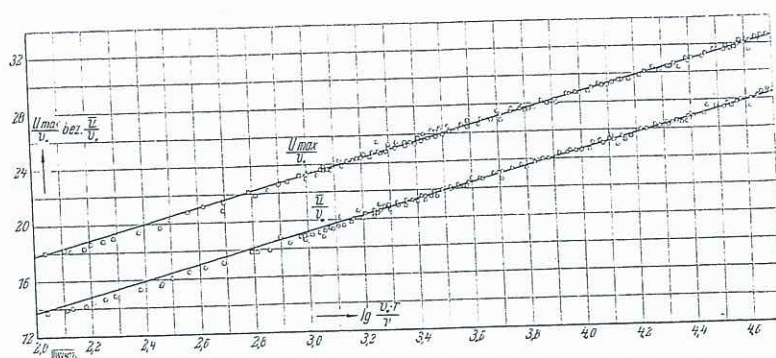
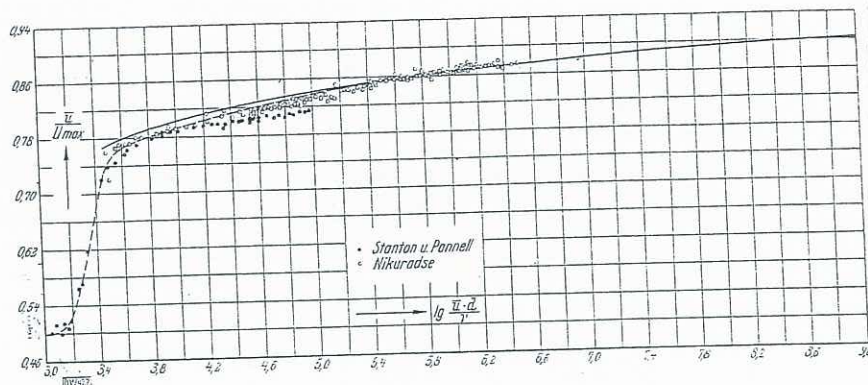


Abb. 38

$\frac{U_{\max}}{v_*}$ bzw. $\frac{\bar{u}}{v_*}$ in Abhängigkeit von $\lg \left(\frac{v_* \cdot r}{\nu} \right)$

immer
schwir
mit de
2.
(u =
Blas
Zahl
kleine
1/7.
obach
Abna
schen
Wert
mung
Schul
keit,
sich
digke

Abb. 39
 $\frac{\bar{u}}{U_{\max}}$ in Abhängigkeit von
 $\lg \left(\frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} \right)$



Gleichung für die universale Geschwindigkeitsverteilung

$$\varphi = c_1 + c_2 \lg \eta$$

sollte aus theoretischen Gründen³⁰⁾ mit den Gleichungen (67) und (68), wenn man die Gerade $\varphi = \varphi(\eta)$ nur durch die wandnahen Punkte legt, insofern in Einklang stehen, als $c_2 = b$ sein soll; in der Tat ist die Gerade

$$\varphi = 5,84 + 5,52 \lg \eta$$

mit den wandnahen Versuchspunkten in guter Übereinstimmung. Dem Wert 5,52 entspricht ein Wert der v. Kármánschen universellen Konstanten

$$\kappa = \frac{2,3025}{5,52} = 0,417.$$

b) Durch Division von Gl. (67) und (68) ergibt sich $\frac{\bar{u}}{U}$ als Funktion von $\frac{v_* r}{\nu}$, aber damit auch als Funktion der Reynoldsschen Zahl, die sich durch $\frac{v_* r}{\nu}$ ausdrücken läßt, denn es ist

$$Re = \frac{2 \bar{u} r}{\nu} = \frac{2 \bar{u}}{v_*} \cdot \frac{v_* r}{\nu} = 2 \cdot 2,828 \left(\frac{v_* r}{\nu} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ läßt sich aber mittels Gl. (64a) ebenfalls durch $\frac{v_* r}{\nu}$ ausdrücken. In Abb. 39 ist das so erhaltene

$$\frac{\bar{u}}{U} = f \left(\frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} \right)$$

für die Reynoldsschen Zahlen $3 \cdot 10^3$ bis $1 \cdot 10^6$ durch die ausgezogene Kurve dargestellt. Außerdem sind hier die Versuchswerte von Stanton und Pannell und von uns eingetragen (Zahlentafel 9). Im Gebiet der ausgebildeten laminaren Strömung ist $\frac{\bar{u}}{U} = 0,5$. Bei $\lg Re = 3,1$,

entsprechend einer Reynoldsschen Zahl $Re = 12,6 \cdot 10^3$, liegt die obere Grenze der laminaren Strömung. Man sieht, daß die gemessenen Punkte bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 200 \cdot 10^3$ ($\lg Re = 5,4$) von der berechneten Kurve abweichen; sie sind durch eine gestrichelte Kurve verbunden. Diese Abweichung ist durch den Einfluß der Zähigkeit zu erklären, den die Formel nicht wiedergibt. Im weiteren Verlauf oberhalb der Reynoldsschen Zahl $Re = 200 \cdot 10^3$ ist die Übereinstimmung ziemlich gut. Die Meßergebnisse von Stanton und Pannell stimmen mit den unsrigen bis zu $\lg Re = 4,2$ gut überein. Oberhalb dieser Grenze ist eine fast konstante Abweichung vorhanden. Diese Abweichung ist sicher durch die Meßmethode bedingt. Wie auf Seite erwähnt ist, haben wir nachträglich Messungen bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen $20 d$ vor dem Austrittsquerschnitt vorgenommen, die gleiche Werte wie unsere früheren Messungen ergeben haben.

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war, die Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömungen in glatten Rohren in einem möglichst großen Bereich von Reynoldsschen Zahlen zu untersuchen. Zu diesem Zwecke wurde eine Versuchsanlage gebaut, die uns gestattete, die turbulenten Wasserströmungen

in kreisförmigen Rohren bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 3240 \cdot 10^3$ zu ermitteln. Durch Auswertung der gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen und der Druckgefälle wurde folgendes festgestellt:

1. Die Form der Geschwindigkeitsverteilung ändert sich mit der Reynoldsschen Zahl, und zwar wird mit zunehmender Reynoldsscher Zahl die Geschwindigkeitsverteilung

³⁰⁾ Vgl. Fußnote 13, S. 2.

Für
genü

(A
3.
keit
trag
der
Aus
Rey

Ve

H.

I

V.

t

W.

H.

T.

Cl

M

R

L

R

L

L

L

L

L

L

L

L

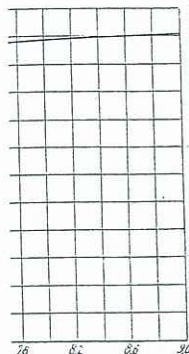
L

L

L

L

L

abhängigkeit von $\lg$ 

immer voller. Der Vergleich der von *Bazin* gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen und derjenigen von *Stanton* mit den unsrigen lieferte gute Übereinstimmung.

2. Der Exponent n des *Prandtl'schen* Potenzgesetzes ($u = ay^n$, wenn y = Abstand von der Wand) hat im *Blasius'schen* Widerstandsbereich bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 100 \cdot 10^3$ den festen Wert $n = 1/7$. Bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen ist der Exponent größer als $1/7$. Oberhalb der Reynoldsschen Zahl $Re = 100 \cdot 10^3$ beobachtet man mit steigenden Reynoldsschen Zahlen eine Abnahme des Exponenten n . Bei der größten Reynoldsschen Zahl $Re = 3240 \cdot 10^3$ erreicht der Exponent n den Wert $1/10$. Indem man mit den für die turbulente Strömung in Wandnähe charakteristischen Größen: τ_0 = Schubspannung an der Wand, ν = kinematische Zähigkeit, ρ = Dichte, geeignete Dimensionslose bildet, ergibt sich ein für alle Reynoldsschen Zahlen gültiges Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für die wandnahen Gebiete:

$$\varphi = \varphi(\eta)$$

$$\text{wobei } \frac{u}{v_*} = \varphi, \quad \frac{v_* y}{\nu} = \eta, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

Für genügend große Werte von η (oberhalb $\eta = 10$) ist genügend genau

$$\varphi = A + B \lg \eta$$

(A und B universelle Konstanten).

3. Die turbulente Austauschgröße wurde in Abhängigkeit vom Wandabstand ermittelt. Die dimensionslose Auftragung $\frac{\varepsilon}{v_* r}$ in Abhängigkeit von y/r zeigt, daß oberhalb der Reynoldsschen Zahl $Re = 100 \cdot 10^3$ die Verteilung der Austauschgröße über den Querschnitt unabhängig von der Reynoldsschen Zahl ist. Unterhalb dieser Reynoldsschen

Zahl ist diese Verteilung sehr stark von der Reynoldsschen Zahl abhängig. Für den mit dem turbulenten Impulsaustausch zusammenhängenden *Prandtl'schen* Mischungsweg ergibt sich, daß das Verhältnis l/r für jeden Punkt des Querschnitts mit wachsenden Reynoldsschen Zahlen abnimmt. Hat Re den Wert $100 \cdot 10^3$ überschritten, so wird die dimensionslose Mischungswegverteilung $l/r = f(y/r)$ unabhängig von der Reynoldsschen Zahl. Die Unabhängigkeit sagt aus, daß ein Einfluß der Zähigkeit oberhalb dieser Reynoldsschen Zahl nicht mehr vorhanden ist.

4. Die gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen und das Widerstandsgesetz werden verglichen mit der von *v. Kármán* auf Grund seiner Ähnlichkeitsbetrachtung errechneten Verteilung und mit dieser im Bereich der großen Reynoldsschen Zahlen, wo der Einfluß der Zähigkeit nicht vorhanden ist, in guter Übereinstimmung gefunden.

Im Anschluß an die *v. Kármán'sche* Ähnlichkeitsbetrachtung werden neuere Überlegungen von *Prandtl* und *Betz* mitgeteilt.

5. Bedeutet $\lambda = \frac{dp}{dx} \frac{2d}{\rho v_*^2}$ die Rohrwiderstandszahl, so wird bis zur Reynoldsschen Zahl $Re = 100 \cdot 10^3$ die *Blasius'sche* Widerstandsformel $\lambda_B = \frac{0,316}{Re^{1/4}}$ bestätigt, für größere

Kennzahlen ergibt sich die Formel

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}}$$

Im Anschluß an die *v. Kármán'sche* und unsere Widerstandsformel werden Beziehungen zwischen der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$ und der maximalen Geschwindigkeit U ermittelt, die neue Zusammenhänge der verschiedenen Formeln erweisen.

Verzeichnis der benutzten Literatur

H. *Blasius*: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Forsch.-Arb. Ing.-Wes., Heft 131, Berlin 1913

V. *Saph* und E. H. *Schoder*: An experimental study of the resistance to the flow of water in pipes. Trans. Amer. Soc. civ. Engr. Bd. 51 (1903) Pap. 944

W. *Nußelt*: Wärmeübergang in Rohrleitungen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 89, Berlin 1910

H. *Ombeck*: Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohrleitungen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 158 u. 159, Berlin 1914

T. E. *Stanton* und J. R. *Pannell*: Similarity of motion in Relation to the surface Friction of Fluids. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 214 (1914) S. 199

Ch. H. *Lees*: On the Flow of viscous Fluids through smooth circular Pipes. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 91 (1915) S. 46

M. *Jakob* und S. *Erk*: Der Druckabfall in glatten Rohren und die Durchflußziffer von Normaldüsen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 267, Berlin 1924

R. *Hermann*: Experimentelle Untersuchung zum Widerstandsgesetz des Kreisrohres bei hohen Reynoldsschen Zahlen und großen Anlaufstrecken. Leipziger Dissertation, Akadem. Verlagsges. m. b. H. Leipzig (1930)

L. *Schiller*: Rohrwiderstand bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, Aachen 1929, herausgegeben von A. Gilles, L. Hopf und Th. v. Kármán (Berlin: J. Springer 1930) S. 69

L. *Prandtl*: Diskussionsbemerkung zum obigen Vortrag von L. Schiller. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik

und verwandter Gebiete, Aachen 1929. Hrsg. von A. Gilles, L. Hopf und Th. v. Kármán (Berlin: J. Springer 1930) S. 78

T. E. *Stanton*: The mechanical viscosity of fluids. Proc. Roy. Soc., Lond. (A), Bd. 85 (1911) S. 366

J. *Nikuradse*: Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 281, Berlin 1926

Th. v. *Kármán*: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Göttinger Nachrichten Math. Phys. Klasse (1930) S. 58

J. *Nikuradse*: Über turbulente Wasserströmungen in geraden Rohren bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, Aachen 1929. Hrsg. von A. Gilles, L. Hopf und Th. v. Kármán (Berlin: J. Springer, 1930) S. 63

M. *Bazin*: Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, Bd. 32 Nr 6 (1902)

L. *Prandtl*: Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 3. Lieferung (1927) S. 1

J. *Boussinesq*: Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France (1877)

L. *Prandtl*: Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 4. Lieferung (1932) S. 18

Th. v. *Kármán*: Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech., Bd. 1 (1921) S. 233

is $1 \cdot 10^8$ durch die dem sind hier die 7 und von uns ein- der ausgebildeten

Bei $\lg Re = 3,1$,

ihl $Re = 12,6 \cdot 10^3$, 1 Strömung. Man zur Reynoldsschen m der berechneten gestrichelte Kurve h den Einfluß der d nicht wiedergibt. Reynoldsschen Zahl ziemlich gut. Die 11 stimmen mit den n. Oberhalb dieser zziehung vorhanden. ie Meßmethode be- , haben wir nach- en Reynoldsschen nitt vorgenommen, Messungen ergeben

Reynoldsschen Zahl Auswertung der ge- und der Druck-

rtelung ändert sich wird mit zunehm- indigkeitsverteilung

- L. Prandtl: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925) S. 136
- L. Prandtl: Bericht über neuere Turbulenzforschungen. Hydraulische Probleme (Berlin: VDI-Verlag 1926) S. 1
- W. Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Z. angew. Math. Mech. Bd. 6 (1926) S. 468
- L. Prandtl: Über ausgebildete Turbulenz: Verh. d. 2. intern. Kongr. f. techn. Mech. Zürich (1927)
- J. Nikuradse: Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 289, Berlin 1929
- W. Fritsch: Der Einfluß der Wandrauigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928) S. 21
- L. M. Swain: On the turbulent wake behind a body of revolution. Proc. Soc. Roy., Lond., Bd. 125. (1929) S. 647
- A. Betz: Über turbulente Reibungsschichten an gekrümmten Wänden. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete. Hrsg. von A. Gilles, L. Hopf und Th. v. Kármán, Aachen 1929 (Berlin: J. Springer, 1930) S. 10
- J. Nikuradse: Widerstandsgesetz und Geschwindigkeitsverteilung von turbulenten Wasserströmungen in glatten und rauhen Rohren. Verh. d. 3. intern. Kongr. f. techn. Mech. Stockholm (1930) S. 239
- H. Schlichting: Über das ebene Windschattenproblem. Göttinger Dissertation, Ing.-Arch. Bd. 1 (1930) S. 533
- L. Prandtl: Turbulenz und ihre Entstehung. Tokio-Vortrag 1929. Journal of the Aeronautical research Institut, Tokio Imperial university Nr. 65 (1930)
- A. Betz: Die v. Kármánsche Ähnlichkeitsüberlegung für turbulente Vorgänge in physikalischer Auffassung. Z. angew. Math. Mech., Bd. 11 (1931) S. 397
- L. Schiller und R. Hermann: Widerstand von Platte und Rohr bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Ing.-Arch. Bd. 1 (1930) S. 392